Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaf...

Joseph Louis Lagrange's

Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra.

Unbestimmte Analysis.

Aus dem Französischen übersetzt

von

A. J. von Oettingen,

herausgegeben

von

H. Weber
in Strassburg.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1898.

Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis.

Von

Joseph Louis Lagrange.

Einleitung.

Die Geometer des vergangenen Jahrhunderts haben sich viel mit der unbestimmten Analysis, die gemeiniglich die »des *Diophantus*« genannt wird, beschäftigt; doch haben eigentlich nur *Bachet* und *Fermat* etwas zu dem hinzugefügt, was schon *Diophantus* selbst uns hinterlassen.

Man verdankt besonders *Bachet* eine vollständige Methode, alle unbestimmten Aufgaben vom ersten Grade aufzulösen*). *Fermat* ist der Schöpfer einiger Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen, die den zweiten Grad übersteigen**); ferner der originellen Methode, mittelst welcher man beweist, dass die Summe oder die Differenz zweier Biquadrate niemals ein Quadrat sein könne; ferner der Lösung einer grossen Zahl sehr schwieriger Aufgaben, sowie mehrerer schöner Theoreme über die ganzen Zahlen ohne Beweis, von

---

*) S. unten § III. Uebrigens spreche ich hier nicht von seinem Commentar zum *Diophantus*, weil diese Arbeit, die in ihrer Art ausgezeichnet ist, keinerlei Entdeckung bringt.

**) Es sind diejenigen, die im VIII. bis X. Kapitel vorstehenden Werkes (gemeint sind hier die *Elemente der Algebra* von *Euler*), dargelegt werden. *Billi* hat sie aus verschiedenen Schriften *Fermat*'s zusammengebracht und am Anfang der neuen Ausgabe des *Diophantus*, die *Fermat* der Sohn herausgegeben hat, veröffentlicht.

denen jedoch die meisten später von *Euler* in den *Petersburger Commentationen* bewiesen worden sind*).

Dieser Zweig der Analysis ist in diesem Jahrhundert fast vollständig vernachlässigt worden und mit Ausnahme *Euler*'s kann ich Niemand nennen, der sich damit befasst hätte; aber die schönen zahlreichen Entdeckungen dieses bedeutenden Geometers haben uns vollauf entschädigt für die Gleichgültigkeit der anderen Geometer gegen diese Art von Untersuchungen. Die »Commentationes« von Petersburg sind erfüllt mit Untersuchungen dieser Art, und das soeben veröffentlichte Werk erweist den Freunden der Diophantischen Analyse wiederum einen Dienst. Man besass bisher keines, in dem dieser Wissenszweig methodisch behandelt wäre, der zugleich die bisher bekannten Regeln zur Auflösung der unbestimmten Probleme zusammenstellte und deutlich erklärte. Die vorliegende Arbeit vereinigt beiderlei Vortheile; aber zur Vervollständigung glaubte ich mehrere Zusätze machen zu müssen, über die ich in kurzen Worten berichten will.

Die Theorie der Kettenbrüche ist eine der fruchtbarsten in der Arithmetik, weil durch sie Probleme, die sonst kaum anzufassen sind, mit Leichtigkeit gelöst werden können; aber noch grösseren Nutzen gewährt sie bei der Auflösung der unbestimmten Gleichungen in ganzen Zahlen. Aus diesem Grunde habe ich mir vorgenommen, diese Theorie mit aller Ausführlichkeit zu behandeln, damit sie recht verständlich werde; da sie in den Hauptwerken über Arithmetik und Algebra fehlt, muss sie wohl wenig von den Geometern gekannt sein: ich wäre zufrieden, wenn es mir gelänge, sie etwas allgemeiner bekannt werden zu lassen. Weiterhin bringe ich neue Anwendungen dieser Theorie auf die unbestimmte Analysis. Ich bestimme die Minima in den unbestimmten Ausdrücken mit zwei Veränderlichen, besonders in denen der zweiten Ordnung, und beweise in Bezug auf diese einige bemerkenswerthe, bisher nicht bekannte Lehrsätze, d. h. solche, die nicht direkt und allgemein hergeleitet worden sind. Besonders im Artikel 33

*) Die Probleme und Theorien, von denen oben die Rede war, sind in den Bemerkungen *Fermat*'s über die *Questiones* des *Diophantus* zerstreut, sowie auch in seinen in den *Opera mathematica* gedruckten Briefen, und im zweiten Bande der Werke von *Wallis*. In den Memoiren der Berliner Akademie von 1770 ff. findet man gleichfalls die Beweise zu einigen Theoremen dieses Verfassers, und zwar solche, die bisher nicht erbracht waren.

wird man eine Methode finden, um die reellen Wurzeln der Gleichungen zweiten Grades in Kettenbrüchen darzustellen, und in den folgenden Artikeln folgt ein strenger Beweis, dass diese Brüche durchaus periodisch sein müssen*).

Die übrigen Zusätze beziehen sich auf die Auflösung der unbestimmten Gleichungen. *Bachet* hatte im Jahre 1624 die vollständige Lösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades gegeben. Diejenige der Gleichungen zweiten Grades erschien erst 1769 in den Memoiren der Berliner Akademie. Dieselbe wird hier, vereinfacht und verallgemeinert, wieder gebracht, so dass nichts zu wünschen übrig bleiben wird. Hinsichtlich der unbestimmten Gleichungen höheren als zweiten Grades besitzen wir nur einige besondere Methoden der Auflösung für einige Fälle und es erscheint sehr wahrscheinlich, dass die allgemeine Lösung dieser Art Gleichungen für einen höheren Grad als den zweiten ebenso unmöglich wird, wie solches der Fall zu sein scheint für die bestimmten Gleichungen, die den vierten Grad übersteigen.

Der letzte Paragraph endlich bringt Untersuchungen über Functionen, die die Eigenschaft haben, dass das Product aus zweien oder mehreren derselben wieder eine ähnliche Function ist; ich gebe eine allgemeine Methode, um Functionen dieser Art zu finden, auch zeige ich die Verwendung derselben zur Lösung verschiedener unbestimmter Probleme, die mit den bisher bekannten Methoden nicht zu fassen waren.

Vorstehendes bezeichnet die Hauptgegenstände dieser »Zusätze«, die ich noch viel weiter hätte ausdehnen können, wenn ich nicht gefürchtet hätte, die passende Grenze zu sehr zu überschreiten. Ich hoffe, dass der behandelte Stoff die Aufmerksamkeit der Geometer wecken und das Gefallen an einem Theile der Analysis wachrufen wird, der es durchaus verdient eifrig betrieben zu werden.

§ I. Die Kettenbrüche in Bezug auf Arithmetik.

1. Da die Theorie der Kettenbrüche in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Arithmetik und Algebra fehlt und daher

*) In dieser neuen Ausgabe (nämlich der zweiten französischen der *Elemente der Algebra* von *Euler*) sind einige kleine Aenderungen in der Analyse des Problems 1 des § II vorgenommen worden, um dieselben directer und leichter verständlich zu gestalten.

den Geometern wenig bekannt sein dürfte, so wird es zweckmässig sein unsere »Zusätze« mit einem kurzen Abriss dieser Theorie, die wir vielfach anwenden werden, zu beginnen.

Man nennt im Allgemeinen **Kettenbruch** einen jeden Ausdruck folgender Form:

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \cdots}}},$$

wo die Grössen α, β, γ, δ, ... und b, c, d, ... ganze positive oder negative Zahlen bedeuten; hier wollen wir indess nur solche Kettenbrüche behandeln, deren Zähler b, c, d, ... $= 1$ sind, die mithin die Form

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cdots}}},$$

haben; α, β, γ ... sind übrigens beliebige ganze positive oder negative Zahlen; diese Kettenbrüche sind die einzigen, die vielfach in der Analyse verwandt werden, während die anderen kaum mehr als Curiositäten sind.

2. Herr *Brouncker* hat, glaube ich, zuerst Kettenbrüche ersonnen; so hat er das Verhältniss des umschriebenen Quadrates zum Flächeninhalt des Kreises gefunden, welches =

$$1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cdots}}}$$

ist; aber man weiss nicht, wie er das gefunden hat. Man findet nur in der »Arithmetica infinitorum« über diesen Gegenstand einige Untersuchungen, in welchen *Wallis* in sehr

indirecter, obwohl durchaus geistvoller Weise die Identität des *Brouncker*'schen Ausdruckes mit dem seinigen, der bekanntlich $= \frac{3.3.5.5.7\ldots}{2.4.4.6.6\ldots}$ ist, darthut: auch giebt er dort eine allgemeine Methode, alle möglichen Arten von Kettenbrüchen in gewöhnliche Brüche zu verwandeln. Uebrigens scheinen diese beiden grossen Geometer die Haupteigenschaften und die besonderen Vorzüge der Kettenbrüche nicht gekannt zu haben; wir werden später sehen, dass diese Entdeckung hauptsächlich *Huyghens* zu verdanken ist.

3. Kettenbrüche bieten sich am ungezwungensten allemal dar, wenn es gilt, gebrochene oder irrationale Zahlen auszudrücken. Gesetzt man solle irgend eine Grösse a darstellen, die nicht durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann; so ist es am einfachsten, diejenige ganze Zahl aufzusuchen, die dem Werthe von a am nächsten kommt, und die mithin nur um einen echten Bruch abweicht. Es sei diese Zahl α, dann wird $a - \alpha$ ein echter Bruch sein, folglich $\frac{1}{a-\alpha}$ eine Zahl, grösser als 1; es sei $\frac{1}{a-\alpha} = b$; da b grösser als 1 ist, so kann man wiederum die ganze Zahl aufsuchen, die dem b am nächsten kommt; diese Zahl heisse β, alsdann ist $b - \beta$ wiederum ein echter Bruch und mithin $\frac{1}{b-\beta}$ grösser als 1; es sei $= c$; wiederum braucht man nur die dem c nächstliegende ganze Zahl aufzusuchen, sie heisse γ; also ist $c - \gamma$ ein echter Bruch und mithin $\frac{1}{c-\gamma}$ grösser als 1; es sei $= d$, welches grösser als 1 ist u. s. w. Auf diese Weise kann man offenbar den Werth von a erschöpfen und zwar auf eine sehr einfache und fördersame Weise, da man nur ganze Zahlen anwendet, deren jede eine Annäherung an den gesuchten Werth vermittelt.

Da nun $\frac{1}{a-\alpha} = b$, so ist

$$a - \alpha = \frac{1}{b} \text{ und } a = \alpha + \frac{1}{b};$$

ferner da $\frac{1}{b-\beta} = c$, so ist

$$b = \beta + \frac{1}{c},$$

und weil $\frac{1}{c - \gamma} = d$, so hat man auch

$$c = \gamma + \frac{1}{d},$$

u. s. w.; setzt man folgweise diese Werthe ein, so kommt:

$$a = \alpha + \frac{1}{b} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c}} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{d}}},$$

und im Allgemeinen

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cdots}}}$$

Es muss hier beachtet werden, dass die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, die, wie wir gesehen haben, ganze Zahlen bedeuten, die den Grössen $a, b, c \ldots$ nahe kommen, auf zwei verschiedene Arten gebildet werden können, da man für den angenäherten Werth sowohl den einen als auch den anderen, zwischen denen jene Zahl eingeschlossen ist, nehmen darf. Indess besteht ein wesentlicher Unterschied bei diesen beiden Arten, die Näherungswerthe zu bilden, denn nimmt man stets kleinere Werthe an, so werden die Nenner $\beta, \gamma, \delta \ldots$ sämmtlich positiv sein; umgekehrt werden sie alle negativ, wenn die Näherungswerthe sämmtlich grösser genommen werden, als der wahre Werth der darzustellenden Grösse, und sie werden bald positiv, bald negativ sein, wenn man die Näherungswerthe bald kleiner, bald grösser annimmt.

In der That, wenn α kleiner als a ist, dann ist $a - \alpha$ positiv; folglich ist auch b positiv und ebenso β; im Gegentheil wird $a - \alpha$ negativ sein, wenn α grösser als a ist; dann aber ist b negativ und ebenso β. Wenn ferner β kleiner als b, so ist auch $b - \beta$ positiv; mithin wird auch c positiv sein und folglich

auch γ; wenn aber β grösser als b ist, so ist $b-\beta$ negativ, mithin sind c und γ negativ u. s. w.

Wenn im Folgenden von negativen Grössen die Rede ist, so nenne ich diejenige Zahl kleiner, die positiv genommen grösser als die andere wäre; später werden wir allerdings zuweilen Zahlen nur in Hinsicht auf ihre absolute Grösse anwenden, alsdann aber soll stets hervorgehoben werden, dass vom Zeichen abzusehen ist.

Ferner muss noch bemerkt werden, dass, wenn unter den Grössen $b, c, d, \ldots$ eine ganze Zahl vorkommt, der Kettenbruch abschliesst, weil man diese Grösse selbst beibehalten kann; sei z. B. c eine ganze Zahl, so ist der Kettenbruch, der den Werth von a giebt:

$$a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{c}}$$

Es ist klar, dass man nämlich $\gamma=c$ nehmen müsste, was

$$d=\frac{1}{c-\gamma}=\frac{1}{0}=\infty$$

ergäbe, und mithin $d=\infty$, so dass man

$$a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\infty}}}$$

erhielte, da alle übrigen Glieder gegen ∞ verschwänden; da $\frac{1}{\infty}=0$, so wird einfach

$$a=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{c}}.$$

Dieser Fall wird stets eintreten, wenn a commensurabel ist, d. h. wenn es ein rationaler Bruch ist; sobald aber a irrational oder transcendent ist, wird der Kettenbruch nothwendig bis ∞ fortlaufen.

4. Sei nun a gleich einem gewöhnlichen Bruche $\frac{A}{B}$, wo A und B gegebene ganze Zahlen bedeuten; offenbar wird die

Zahl α, die dem Werthe von $\frac{A}{B}$ am nächsten kommt, gleich dem Quotienten sein, den man bei der Division von B in A erhält; es sei in gewöhnlicher Weise α dieser Quotient und C der Rest, so ist $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$ folglich $b = \frac{B}{C}$; um ebenso den Werth von β zu erhalten, der sich am meisten dem $\frac{B}{C}$ nähert, braucht man nur B durch C zu dividiren und statt β den Quotienten dieser Division zu nehmen; es sei alsdann D der Rest, so hat man $b - \beta = \frac{D}{C}$, folglich $c = \frac{C}{D}$: man wird daher mit dem Dividiren fortfahren, indem C durch D den Werth für γ giebt u. s. w.; hieraus erhellt folgende höchst einfache Regel für die Umwandlung der gewöhnlichen in Kettenbrüche:

Man dividire zunächst den Zähler des gegebenen Bruches durch den Nenner und bezeichne den Quotienten mit α; alsdann theile man den Nenner durch den Rest und nenne den Quotienten β; und fahre in dieser Art fort, indem man stets den vorletzten Rest durch den letzten Rest dividirt, bis man eine Division ohne Rest erhält, was nothwendig eintreten muss, da die Reste stets ganze Zahlen sind, die immer kleiner und kleiner werden; so erhält man den Kettenbruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cdots}}}$$

der dem gegebenen Bruche gleich sein wird.

5. Es sei z. B. der Bruch $\frac{1103}{887}$ in einen Kettenbruch zu zu verwandeln; man theilt also 1103 durch 887 und erhält den Quotienten 1 und den Rest 216; man theilt ferner 887 durch 216, erhält den Quotienten 4 und den Rest 23; ferner 216 durch 23 und erhält den Quotienten 9 und den Rest 9; man theilt noch 23 durch 9, erhält den Quotienten 2 und den Rest 5; theilt 9 durch 5, erhält den Quotienten 1 und den Rest 4; 5 durch 4 giebt 1 und Rest 1; endlich ergiebt 4 durch 1 den Quotienten 4 und den Rest 0, und das Verfahren ist

zu Ende. Ordnet man nun alle die gefundenen Quotienten, so hat man die Reihe 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4 und bildet mit diesen Zahlen den Kettenbruch

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}.$$

6. Da man bei dem gewöhnlichen Dividiren als Quotienten immer diejenige ganze Zahl nimmt, die gleich oder kleiner als der gegebene Bruch ist, so wird man mittelst der vorliegenden Methode stets Kettenbrüche mit positiven Zählern erhalten.

Man kann aber als Quotienten auch diejenige Zahl nehmen, die unmittelbar grösser als der vorliegende Bruch ist, wenn letzterer nicht zufällig eine ganze Zahl ist, man braucht mithin nur um eine Einheit den vorhin erhaltenen Quotienten zu vermehren und der Rest wird alsdann negativ werden. Man kann auf diese Art nach Belieben positive oder negative Glieder erhalten.

Im vorliegenden Beispiel können wir statt des ersten Quotienten 1 den Werth 2 nehmen; alsdann wird der Rest -671 werden, der nunmehr in 887 zu dividiren sein wird; man erhält also den Quotienten -1 und den Rest 216 oder den Quotienten -2 und den Rest -455. Nehmen wir den grösseren Quotienten -1, so muss der Rest -671 durch den Rest 216 dividirt werden; man bekommt den Quotienten -3, Rest -23, oder Quotient -4, Rest 193. Ich setze die Division fort, indem ich den grösseren Werth -3 anwende; dividire 216 durch den Rest -23 und erhalte den Quotienten -9, Rest 9, oder Quotient -10, Rest -14 u. s. w.

Auf diese Weise erhält man

$$\frac{1103}{887} = 2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{-9 + \cdots}}}$$

woraus zu ersehen, dass alle Nenner negativ geworden sind.

7. Man kann übrigens jeden negativen Nenner in einen positiven verwandeln durch blosse Aenderung des Zeichens des Zählers; alsdann aber muss auch das Zeichen des folgenden Zählers verändert werden; denn offenbar ist

$$\mu + \cfrac{1}{-\nu + \cfrac{1}{\omega + \ddots}} = \mu - \cfrac{1}{\nu - \cfrac{1}{\omega + \ddots}}$$

Ferner kann man alle negativen Zeichen verschwinden lassen und einen Kettenbruch mit lauter positiven Zeichen erhalten, denn es ist ganz allgemein

$$\mu - \cfrac{1}{\nu + \ddots} = \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\nu - 1 + \ddots}},$$

wie man sich leicht überzeugt, indem man diese beiden Ausdrücke in gewöhnliche Brüche verwandelt.

Man könnte auch in ähnlicher Weise negative Glieder statt der positiven einführen, denn es ist

$$\mu + \cfrac{1}{\nu + \ddots} = \mu + 1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\nu - 1 + \ddots}};$$

woraus erhellt, dass man mittelst solcher Transformationen zuweilen einen Kettenbruch vereinfachen und auf eine geringere Anzahl von Gliedern reduciren kann; was jedesmal geschehen kann, sobald es Nenner giebt, die $= 1$ oder $= -1$ sind.

Um einen gegen die gegebene Grösse möglichst convergirenden Kettenbruch zu erhalten, muss man offenbar im Allgemeinen für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ganze Zahlen annehmen, die den Werthen $a, b, c, \ldots$ möglichst nahe liegen, gleichviel ob grösser oder kleiner als diese; ausserdem ist klar, dass, wenn man z. B. für α nicht den dem a nächstliegenden Werth annimmt, die folgende Zahl $\beta = 1$ sein muss; in der That wird der

Unterschied zwischen a und α grösser als $\frac{1}{2}$ sein, mithin $b = \frac{1}{a - \alpha} < 2$; also kann β nur $= 1$ sein.

Sobald man also in einem Kettenbruch Nenner findet, die $= 1$ sind, so ist das ein sicheres Zeichen dafür, dass man den vorhergehenden Nenner nicht so nahe als irgend möglich gewählt hat und dass mithin der Bruch vereinfacht werden kann, indem man diese Nenner um eine Einheit vermehrt oder vermindert, was mit Hülfe der vorhergehenden Formeln ausgeführt werden kann, ohne die ganze Rechnung zu wiederholen.

8. Die unter No. 4 mitgetheilte Methode kann auch dazu dienen, eine jede irrationale oder transcendente Grösse in einen Kettenbruch zu verwandeln, falls sie vorher in Decimalen ausgedrückt worden ist. Da aber dieser in Decimalen angegebene Werth nur ein angenäherter sein kann, und da man durch Vermehrung der letzten Stelle um eine Einheit zwei Grenzen hat, zwischen denen der wahre Werth liegen muss, so muss man, um aus diesen Grenzen nicht herauszutreten, ein und dieselbe Rechnung für beide Brüche, um welche es sich handelt, ausführen und schliesslich im Kettenbruch nur diejenigen Quotienten belassen, die bei beiden Rechnungen gleich gross ausfallen.

Es sei z. B. die Zahl π, das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser durch einen Kettenbruch darzustellen. Nach *Vieta*'s Berechnung ist dieser Werth $= 3{,}1415926535\ldots$, so dass man $\frac{31415926535}{10000000000}$ nach obiger Methode in einen Kettenbruch zu verwandeln hat; nimmt man nur $\frac{314159}{100000}$, so erhält man die Quotienten 3, 7, 15, 1 . . ., und nimmt man den grösseren Bruch $\frac{314160}{100000}$, so findet man 3, 7, 16, . . .; so dass der dritte Quotient unsicher bliebe; hieraus ersieht man, dass, um den Kettenbruch auf mehr als drei Glieder darzustellen, man einen Werth zu Grunde legen muss, der mehr als sechs Decimalen enthält.

Nimmt man den von *Ludolph* gegebenen Werth mit 35 Stellen

$$3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288,$$

und rechnet man mit diesem und zugleich mit dem um eine Einheit vermehrten Werthe, so findet man die Quotienten

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1,
84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1,4, 2, 6, 6, 1;

so dass man erhält

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}$$

Da hier Nenner = 1 vorkommen, so kann der Bruch vereinfacht werden durch Einführung negativer Glieder, und mit Benutzung der Formeln in No. 7 findet man:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}}$$

oder

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-3 + \cdots}}}}}$$

9. Wir haben an einem anderen Orte gezeigt, wie die Theorie der Kettenbrüche zur Auflösung numerischer Glei

chungen angewandt werden kann in Fällen, wo bisher nur unvollkommene und ungenügende Methoden bekannt waren. (Siehe Memoiren der Berliner Akademie 1767 und 1768). *) Die ganze Schwierigkeit besteht darin, in einer beliebigen Gleichung für die gesuchte Wurzel den meist angenäherten Werth, darüber oder darunter, zu finden, und hierfür haben wir die ersten sicheren und allgemeinen Regeln aufgestellt, mittelst welcher man nicht bloss erkennt, wieviel reelle positive oder negative, gleiche oder verschiedene Wurzeln die vorgelegte Gleichung besitzt, sondern auch wie man leicht die Grenzen einer jeden dieser Wurzeln findet und sogar die Grenzen der reellen Werthe, die in den imaginären Wurzeln auftreten. Es sei also x die Unbekannte der vorliegenden Gleichung, so sucht man zunächst diejenige ganze Zahl auf, die sich am meisten der gesuchten Wurzel nähert; sie heisse α; jetzt setze man nur noch, wie in No. 3 geschehen ist, $x = \alpha + \frac{1}{y}$ (ich nenne hier x, y, z, ... was dort a, b, c, genannt ist); nimmt man diesen Werth für x, so hat man, nach Fortschaffung der Brüche, eine Gleichung von demselben Grade in y, die mindestens eine Wurzel haben muss, die positiv oder negativ grösser als 1 ist. Jetzt sucht man weiter den dieser Wurzel nächstliegenden ganzen Werth, er sei β; man mache $y = \beta + \frac{1}{z}$ und man erhält wieder eine Gleichung in z, die ebenfalls eine Wurzel haben muss, die grösser als 1 ist und für die wieder ein möglichst angenäherter ganzzahliger Werth γ gesucht wird u. s. w. Die gesuchte Wurzel wird dann ausgedrückt durch den Kettenbruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cdots}}},$$

der abbricht, wenn die Wurzel commensurabel ist, aber sicher unendlich sich fortsetzt, wenn die Wurzel incommensurabel ist.

In der citirten Abhandlung findet man alle Principien und

---

*) Œuvres de *Lagrange*, II, p. 538 und 581.

die nöthigen Einzelheiten des Verfahrens erläutert, um die Methode und ihre Anwendung kennen zu lernen, auch verschiedene Hülfsmittel, um das Verfahren abzukürzen; wir glauben über diesen so wichtigen Gegenstand fast Nichts zu wünschen übrig gelassen zu haben.

In Bezug auf die Wurzeln der Gleichungen zweiten Grades werden wir unten (No. 33 ff.) eine besondere, sehr einfache Methode mittheilen, sie durch Kettenbrüche darzustellen.

10. Nachdem wir die Herstellung der Kettenbrüche erklärt haben, gehen wir dazu über, ihre Anwendung und ihre Haupteigenschaften darzuthun.

Es ist offenbar, dass man, je mehr Glieder man in einem Kettenbruch nimmt, um so mehr dem wahren Werthe, der dargestellt werden soll, sich nähert, so dass man, wenn man folgweise bei jedem folgenden Gliede anhält, eine Reihe von Werthen erhält, die sich immer mehr dem vorgesetzten Werthe nähern.

Hat man also den Werth von a in den Kettenbruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ddots}}},$$

verwandelt, so hat man die Werthe:

$$\alpha,\ \alpha + \frac{1}{\beta},\ \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}},\ \ldots,$$

mithin nach Reduction:

$$\alpha,\ \frac{\alpha\beta + 1}{\beta},\ \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1},\ \ldots,$$

welche Werthe sich immer mehr dem von a nähern.

Um besser das Gesetz der Convergenz dieser Grössen beurtheilen zu können, bemerke man, dass man nach den Formeln No. 3 erhält:

$$a = \alpha + \frac{1}{b},\ b = \beta + \frac{1}{c},\ c = \gamma + \frac{1}{d},\ \ldots,$$

woraus zunächst erhellt, dass α der erste angenäherte Werth von a ist; wenn man alsdann den genauen Werth von a nimmt, der gleich $\frac{\alpha b + 1}{b}$ ist, und wenn man darin b durch seinen angenäherten Werth β ersetzt, so erhält man für diesen angenäherten Werth $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$; man erhält einen dritten noch näheren Werth, wenn man zunächst für b seinen genauen Werth $\frac{\beta c + 1}{c}$ setzt, woraus $a = \frac{(\alpha\beta + 1)c + \alpha}{\beta c + 1}$, und setzt man alsdann für c den angenäherten Werth γ, so wird der neue angenäherte Werth von a

$$\frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1};$$

setzt man ebenso weiter für c seinen genauen Werth $\frac{\gamma d + 1}{d}$, so erhält man

$$a = \frac{[(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha]\, d + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)\, d + \beta};$$

und setzt man für d seinen angenäherten Werth δ, so erhält man als vierte Annäherung

$$\frac{[(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha]\,\delta + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)\,\delta + \beta};$$

und so fort.

Daraus ist leicht ersichtlich, dass man, wenn man mit Hülfe der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Ausdrücke bildet:

$$\begin{array}{ll}
A = \alpha, & A_1 = 1, \\
B = \beta A + 1, & B_1 = \beta, \\
C = \gamma B + A, & C_1 = \gamma B_1 + A_1, \\
D = \delta C + B, & D_1 = \delta C_1 + B_1, \\
E = \varepsilon D + C, & E_1 = \varepsilon D_1 + C_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

folgende Reihe nach der Grösse a convergirender Werthe erhält

$$\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{E}{E_1}, \frac{F}{F_1}, \ldots$$

Ist die Grösse a rational und durch einen beliebigen Bruch $\frac{V}{V_1}$ darsetllbar, so wird offenbar dieser Bruch stets der letzte Werth in vorstehender Reihe sein, denn in diesem Falle hat der Kettenbruch ein Ende und es muss immer der letzte Werth der vorstehenden Reihe dem ganzen Kettenbruch gleich sein.

Ist aber a irrational oder transcendent, so wird nothwendig der Kettenbruch unendlich sein und es kann die Reihe convergirender Werthe bis zur Unendlichkeit fortgesetzt werden.

11. Untersuchen wir nun die Eigenschaften dieser Brüche; zunächst ist klar, dass die Zahlen $A, B, C, \ldots$ stets wachsen werden, und ebenso die Zahlen $A_1, B_1, C_1, \ldots$, denn:

1) Wenn die Zahlen $\alpha. \beta, \gamma, \ldots$ sämmtlich positiv sind, so werden es auch alle $A, B, C, \ldots$ und alle $A_1, B_1, C_1, \ldots$ sein, und man hat offenbar:

$$B > A, C > B, D > C, \ldots,$$
$$B_1 = \text{oder} > A_1, C_1 > B_1, D_1 > C_1, \ldots$$

2) Wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle oder zum Theil negativ sind, so wird es unter den Zahlen $A, B, C, \ldots$ und $A_1, B_1, C_1, \ldots$ theils positive, theils negative geben; in diesem Falle aber beachte man, dass man zufolge der vorhergehenden Formeln

$$\frac{B}{A} = \beta + \frac{1}{\alpha}, \frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}, \frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}, \ldots$$

hat, woraus zunächst erhellt, dass, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nicht gleich 1 sind, man, abgesehen vom Zeichen, $\frac{B}{A} > 1$ hat; folglich ist $\frac{A}{B} < 1$, mithin $\frac{C}{B} > 1$ u. s. f.; folglich ist $B > A$, $C > B, \ldots$

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn unter den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sich welche befinden, die gleich 1 sind; es sei z. B. als erstes $\gamma = 1$, so hat man zunächst $B > A$, aber $C < B$,

sobald der Bruch $\frac{A}{B}$ ein anderes Zeichen hat als γ; dieses folgt aus der Gleichung $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$; denn in diesem Falle wird $\gamma + \frac{A}{B} < 1$ sein; ich behaupte aber, dass in diesem Falle nothwendig $D > B$ sein wird; denn da $\gamma = \pm 1$, so ist (No. 10)

$$c = \pm 1 + \frac{1}{d}, \text{ und } c - \frac{1}{d} = \pm 1;$$

da aber c und d grösser als 1 sind (No. 3), so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn c und d gleiche Zeichen haben; da nun γ und δ ganze Zahlen sind, die nahe bei c und d liegen, müssen auch γ und δ von gleichem Zeichen sein; aber der Bruch $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ muss dasselbe Zeichen haben wie γ, denn γ ist eine ganze Zahl und $\frac{A}{B}$ ist ein Bruch < 1; folglich haben $\frac{C}{B}$ und δ gleiches Zeichen; mithin ist $\frac{\delta C}{B}$ eine positive Grösse. Nun ist aber $\frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}$; multiplicirt man also mit $\frac{C}{B}$, so erhält man $\frac{D}{B} = \delta \frac{C}{B} + 1$; da nun $\frac{\delta C}{B}$ positiv ist, so muss $\frac{D}{B} > 1$ sein; mithin ist $D > B$.

Hieraus ersieht man, dass, wenn in der Reihe $A, B, C, \ldots$ ein Werth vorkommt, der kleiner als der vorhergehende ist, der darauf folgende Werth durchaus grösser sein wird; so dass, wenn man diese kleineren Werthe bei Seite setzt, die Reihe dennoch wachsen wird.

Uebrigens wird man stets, wenn man will, diese Unbequemlichkeit vermeiden können, entweder indem man alle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positiv nimmt oder alle von der Einheit abweichen lässt, was stets möglich ist.

Dieselben Ueberlegungen gelten in Betreff der Reihe $A_1, B_1, C_1 \ldots$, in welcher man analog hat

$$\frac{B_1}{A_1} = \beta, \quad \frac{C_1}{B_1} = \gamma + \frac{A_1}{B_1}, \quad \frac{D_1}{C_1} = \delta + \frac{B_1}{C_1}, \ldots,$$

woraus Schlüsse folgen, ähnlich den obigen.

12. Multiplicirt man nun kreuzweise die benachbarten Werthe in der Reihe $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$, so findet man:

$$BA_1 - AB_1 = 1, \quad CB_1 - BC_1 = AB_1 - BA_1,$$
$$DC_1 - CD_1 = BC_1 - CB_1, \ldots,$$

hieraus folgt, dass im Allgemeinen

$$\begin{aligned} BA_1 - AB_1 &= 1, \\ CB_1 - BC_1 &= -1, \\ DC_1 - CD_1 &= 1, \\ ED_1 - DE_1 &= -1, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Eigenschaft ist sehr bemerkenswerth und giebt Anlass zu mehreren wichtigen Folgerungen.

Zunächst ersieht man, dass die Brüche $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$ schon auf ihren einfachsten Ausdruck reducirt sein müssen; denn wenn z. B. C und C_1 einen gemeinschaftlichen Factor hätten, so wäre die ganze Zahl $CB_1 - BC_1$ auch durch diesen Werth theilbar, was aber nicht angeht wegen $CB_1 - BC_1 = -1$. Ferner: bringt man die vorstehenden Gleichungen auf die Form:

$$\begin{aligned} \frac{B}{B_1} - \frac{A}{A_1} &= \frac{1}{A_1 B_1} \\ \frac{C}{C_1} - \frac{B}{B_1} &= -\frac{1}{B_1 C_1} \\ \frac{D}{D_1} - \frac{C}{C_1} &= \frac{1}{C_1 D_1} \\ \frac{E}{E_1} - \frac{D}{D_1} &= -\frac{1}{D_1 E_1} \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so erkennt man leicht, dass die Differenzen zwischen benachbarten Brüchen der Reihe $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$ immer mehr abnehmen, so dass diese Reihe nothwendig convergirt.

Nun behaupte ich, dass die Differenz zwischen zwei auf einander folgenden Brüchen so klein als nur immer möglich ist, so dass zwischen diese Brüche kein anderer Bruch fallen kann, wenn er nicht einen grösseren Nenner hat als die betrachteten Brüche.

Nehmen wir z. B. die beiden Brüche $\frac{C}{C_1}$ und $\frac{D}{D_1}$, deren Differenz $= \frac{1}{C_1 D_1}$ ist, und nehmen wir an, es gäbe einen Bruch $\frac{m}{n}$, dessen Werth dazwischen läge und in welchem der Nenner n kleiner als C_1 oder als D_1 sei; da $\frac{m}{n}$ zwischen $\frac{C}{C_1}$ und $\frac{D}{D_1}$ liegen soll, so muss die Differenz $\frac{m}{n} - \frac{C}{C_1}$, welche gleich $\frac{(m C_1 - n C)}{n C_1}$ oder gleich $\frac{(n C - m C_1)}{n C_1}$ ist, kleiner als $\frac{1}{C_1 D_1}$ sein, welches die Differenz von $\frac{D}{D_1}$ und $\frac{C}{C_1}$ ist; aber jene kann offenbar nicht kleiner sein als $\frac{1}{n C_1}$; wenn also $n < D_1$, so ist sie nothwendig $> \frac{1}{C_1 D_1}$; da ebenso die Differenz $\frac{m}{n} - \frac{D}{D_1}$ nicht kleiner sein kann als $\frac{1}{n D_1}$, so muss sie grösser sein als $\frac{1}{C_1 D_1}$ wenn $n < C_1$, während sie kleiner sein müsste.

13. Wir wollen jetzt untersuchen, um wieviel jeder Bruch der Reihe $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \ldots$ sich dem Werthe von a nähern wird. Dazu bemerken wir, dass die unter No. 10 gefundenen Formeln ergeben:

$$a = \frac{Ab + 1}{A_1 b},$$

$$a = \frac{Bc + A}{B_1 c + A_1},$$

$$a = \frac{Cd + B}{C_1 d + B_1},$$

$$a = \frac{De + C}{D_1 e + C_1},$$

und so fort.

Will man nun wissen, um wieviel z. B. der Bruch $\frac{C}{C_1}$ sich dem a nähert, so bilde man die Differenz von $\frac{C}{C_1}$ und a: nimmt man für a den Werth $\frac{(Cd+B)}{(C_1 d+B_1)}$, so folgt:

$$a - \frac{C}{C_1} = \frac{Cd+B}{C_1 d+B_1} - \frac{C}{C_1} = \frac{BC_1 - CB_1}{C_1(C_1 d+B_1)} = \frac{1}{C_1(C_1 d+B_1)},$$

weil $BC_1 - CB_1 = 1$ (No. 12); da wir nun voraussetzen, dass δ der angenäherte Werth von d sei, sodass $d - \delta < 1$ ist (No. 3), so folgt, dass d zwischen δ und $\delta \pm 1$ liege (wobei das obere Zeichen gilt, sobald der angenäherte Werth von δ kleiner ist, als der wahre Werth d und das untere Zeichen, sobald $\delta > d$), es wird mithin auch der Werth von $C_1 d + B_1$ zwischen $C_1 \delta + B_1$ und $C_1(\delta \pm 1) + B_1$ liegen, d. h. zwischen D_1 und $D_1 \pm C_1$; folglich liegt die Differenz $a - \frac{C}{C_1}$ zwischen $\frac{1}{C_1 D_1}$ und $\frac{1}{C_1(D_1 \pm C_1)}$ und hieraus kann man das Maass der Annäherung des Bruches $\frac{C}{C_1}$ beurtheilen.

14. Im Allgemeinen hat man:

$$a = \frac{A}{A_1} + \frac{1}{A_1 b},$$

$$a = \frac{B}{B_1} - \frac{1}{B_1(B_1 c + A_1)},$$

$$a = \frac{C}{C_1} + \frac{1}{C_1(C_1 d + B_1)},$$

$$a = \frac{D}{D_1} - \frac{1}{D_1(D_1 e + C_1)},$$

u. s. f.

Nimmt man nun an, die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seien stets kleiner als die wahren angenommen, so werden dieselben immer positiv sein, ebenso wie die Grössen $b, c, d, \ldots$ (No. 3); folglich werden auch die Zahlen $A, B, C, \ldots$ sämmtlich positiv sein; daraus folgt, dass die Differenzen zwischen a und den Brüchen $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1},$ abwechselnd positiv und negativ, d. h.

dass diese Brüche abwechselnd kleiner und grösser als a sein werden.

Da ferner $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$, ... (hyp.), so hat man

$$b > B_1, \quad B_1 c + A_1 > B_1 \gamma + A_1 > C_1,$$
$$C_1 d + B_1 > C_1 \delta + B_1 > D_1,$$

und da $b < \beta + 1$, $c < \gamma + 1$, $d < \delta + 1$, ... so ist auch

$$b < B_1 + 1, \quad B_1 c + A_1 < B_1(\gamma + 1) + A_1 < C_1 + B_1,$$
$$C_1 d + B_1 < C_1(\delta + 1) + B_1 < D_1 + C_1, \ldots;$$

so dass die Fehler, die entstehen, wenn man die Brüche $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$ statt des Werthes a nähme, kleiner wären als

$$\frac{1}{A_1 B_1}, \quad \frac{1}{B_1 C_1}, \quad \frac{1}{C_1 D_1}, \ldots,$$

und grösser als

$$\frac{1}{A_1(B_1 + A_1)}, \quad \frac{1}{B_1(C_1 + B_1)}, \quad \frac{1}{C_1(D_1 + C_1)}, \ldots,$$

woraus man erkennt, wie klein diese Fehler sind und wie rasch sie abnehmen von einem Bruche zum anderen.

Aber es folgt noch weiter: Da die Brüche $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$ abwechselnd kleiner und grösser sind als a, so wird dieser letztere Werth sich stets zwischen irgend zwei auf einander folgenden Werthen befinden; nun aber haben wir gesehen (No. 12), dass es zwischen zwei solchen Brüchen unmöglich einen Bruch geben könne mit kleinerem Nenner als bei beiden Brüchen; daraus lässt sich folgern, dass ein jeder der fraglichen Brüche die Grösse a genauer darstellt, als es sonst irgend ein anderer Bruch vermöchte, dessen Nenner kleiner wäre, als der des folgenden Bruches; d. h. dass der Bruch $\frac{C}{C_1}$ z. B. den Werth von a genauer darstellen wird als irgend ein Bruch $\frac{m}{n}$, in welchem n kleiner wäre als D_1.

15. Wenn die angenäherten Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle oder theilweise grösser sind als die wirklichen, so wird es unter ihnen nothwendig auch negative geben (No. 3), und dadurch werden auch einige der Werthe $A, B, C, \ldots A_1, B_1, C_1, \ldots$ negativ, mithin werden die Differenzen zwischen den Brüchen $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}$ und dem Werth a nicht mehr abwechselnd positiv sein, wie in dem in voriger Nummer betrachteten Falle; so dass diese Brüche nicht mehr den Vortheil darbieten, Grenzwerthe zu sein, die abwechselnd über und unter dem Werthe von a liegen, ein Vortheil, der mir sehr wichtig zu sein scheint; daher muss man in der Praxis stets Kettenbrüche mit durchweg positiven Nennern vorziehen. Und so wollen wir fortan nur solche Kettenbrüche betrachten.

16. Untersuchen wir also die Reihe

$$\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1}, \ldots,$$

in welcher die Brüche abwechselnd grösser und kleiner sind als die Grösse a, so kann man offenbar die Reihe theilen in folgende:

$$\frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{E}{E_1}, \ldots$$

$$\frac{B}{B_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{F}{F_1}, \ldots;$$

die erstere wird aus Brüchen bestehen, die sämmtlich kleiner sind als a und die sich sämmtlich dem Werthe von a nähern; die zweite besteht aus lauter Brüchen, die grösser sind als a und die sämmtlich kleiner werden gegen a hin. Untersuchen wir nun diese beiden Reihen, eine jede besonders. In der ersteren hat man (No. 10 und 12)

$$\frac{C}{C_1} - \frac{A}{A_1} = \frac{\gamma}{A_1 C_1},$$

$$\frac{E}{E_1} - \frac{C}{C_1} = \frac{\varepsilon}{C_1 E_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und in der zweiten

$$\frac{B}{B_1} - \frac{D}{D_1} = \frac{\delta}{B_1 D_1},$$

$$\frac{D}{D_1} - \frac{F}{F_1} = \frac{\zeta}{D_1 F_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn die Zahlen γ, δ, ε, ... alle gleich 1 wären, so könnte man, wie in No. 12, beweisen, dass es zwischen zwei sich folgenden Brüchen der einen oder der anderen Reihe niemals einen anderen Bruch gäbe, dessen Nenner kleiner wäre, als die dieser beiden Brüche; aber das verhält sich nicht so, wenn die Zahlen γ, δ, ε, ... von 1 verschieden sind; denn in diesem Falle könnte man zwischen die beiden Brüche ebenso viele Brüche einschalten, als es Einheiten giebt in den Zahlen $\gamma - 1$, $\delta - 1$, $\varepsilon - 1$, ... Zu diesem Zweck braucht man nur folgweise in die Werthe von C und C_1 (No. 10) die Zahlen 1, 2, 3, ... γ an Stelle von γ zu setzen; ebenso in den Ausdrücken für D und D_1 die Zahlen 1, 2, 3, ... δ an Stelle von δ u. s. f.

17. Angenommen z. B. γ sei $= 4$, so hat man

$$C = 4B + A, \quad C = 4B_1 + A_1,$$

und man wird zwischen $\frac{A}{A_1}$ und $\frac{C}{C_1}$ drei Brüche mit Zwischenwerthen einschalten können, nämlich:

$$\frac{B + A}{B_1 + A_1}, \quad \frac{2B + A}{2B_1 + A_1}, \quad \frac{3B + A}{3B_1 + A_1}.$$

Die Nenner dieser Brüche bilden offenbar eine arithmetisch wachsende Reihe von A_1 bis C_1, und wir wollen zeigen, dass die Brüche selbst auch beständig zunehmen von $\frac{A}{A_1}$ bis $\frac{C}{C_1}$, so dass es jetzt nicht mehr möglich ist, in der Reihe

$$\frac{A}{A_1}, \quad \frac{B + A}{B_1 + A_1}, \quad \frac{2B + A}{2B_1 + A_1}, \quad \frac{3B + A}{3B_1 + A_1}, \quad \frac{4B + A}{4B_1 + A_1} \text{ oder } \frac{C}{C_1}$$

irgend einen Bruch einzuschalten, dessen Werth zwischen zwei sich folgende Brüche fällt und dessen Nenner gleichfalls zwischen denen der entsprechenden Brüche fällt. Denn nimmt man die Differenzen zwischen den vorhergehenden Brüchen, so hat man, wegen $BA_1 - AB_1 = 1$

$$\frac{B+A}{B_1+A_1} - \frac{A}{A_1} = \frac{1}{A_1(B_1+A_1)},$$

$$\frac{2B+A}{2B_1+A_1} - \frac{B+A}{B_1+A_1} = \frac{1}{(B_1+A_1)(2B_1+A_1)},$$

$$\frac{3B+A}{3B_1+A_1} - \frac{2B+A}{2B_1+A_1} = \frac{1}{(2B_1+A_1)(3B_1+A_1)},$$

$$\frac{C}{C_1} - \frac{3B+A}{3B_1+A_1} = \frac{1}{(3B_1+A_1)C_1};$$

woraus erhellt, dass erstens die Brüche $\frac{A}{A_1}, \frac{B+A}{B_1+A_1}, \ldots$ immer wachsen, da ihre Differenzen stets positiv sind; da ferner diese Differenzen gleich 1 dividirt durch das Product der beiden Nenner sind, so kann man, ähnlich wie in No. 12 geschehen ist, beweisen, dass unmöglich zwischen zwei sich folgenden Brüchen ein Bruch $\frac{m}{n}$ gefunden werden kann, so dass der Nenner n zwischen jene beiden Nenner fiele, oder der kleiner sei als der grössere der beiden Nenner.

Hierzu kommt, dass, da die fraglichen Brüche sämmtlich grösser sind als a und da der Bruch $\frac{B}{B_1}$ kleiner als a ist, ein jeder dieser Brüche sich dem Werth von a nähern wird, so dass die Differenz selbst kleiner sein wird als die Differenz dieses Bruches und $\frac{B}{B_1}$; denn es ist

$$\frac{A}{A_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{A_1 B_1},$$

$$\frac{B+A}{B_1+A_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{(B_1+A_1)B_1},$$

$$\frac{2B+A}{2B_1+A_1}-\frac{B}{B_1}=\frac{1}{(2B_1+A_1)B_1},$$

$$\frac{3B+A}{3B_1+A_1}-\frac{B}{B_1}=\frac{1}{(3B_1+A_1)B_1},$$

$$\frac{C}{C_1}-\frac{B}{B_1}=\frac{1}{C_1B_1}.$$

Da nun diese Differenzen auch gleich sind der Einheit dividirt durch die Producte der Nenner, so kann man dieselbe Betrachtung anstellen wie in No. 12, um zu beweisen, dass es keinen Bruch $\frac{m}{n}$ geben könne, der zwischen die Brüche $\frac{A}{A_1}$, $\frac{B+A}{B_1+A_1}$, $\frac{2B+A}{2B_1+A_1}$, ... und den Bruch $\frac{B}{B_1}$ fällt, wenn der Nenner n kleiner ist als der des letzteren Bruches; daraus folgt, dass ein jeder dieser Brüche sich mehr dem a nähert, als es irgend ein anderer Bruch kleiner als a thut, der einen kleineren Nenner hat, d. h. der mit kleineren Ziffern auszudrücken ist.

18. Wir haben vorstehend nur die Brüche zwischen $\frac{A}{A_1}$ und $\frac{C}{C_1}$ besprochen; es verhält sich aber ebenso mit den Brüchen zwischen $\frac{C}{C_1}$ und $\frac{E}{E_1}$, sowie wie zwischen $\frac{E}{E_1}$ und $\frac{G}{G_1}$, ... wenn ε, η ... Zahlen sind, die grösser als 1 sind.

Man kann alles Angeführte auch auf die Reihe $\frac{B}{B_1}$, $\frac{D}{D_1}$, $\frac{F}{F_1}$, ... beziehen, so dass, wenn δ, ζ, ... grösser als 1 sind, man zwischen die Brüche $\frac{B}{B_1}$ und $\frac{D}{D_1}$, sowie zwischen $\frac{D}{D_1}$ und $\frac{F}{F_1}$ ... verschiedene Brüche einschalten kann, die grösser sind als a, die aber immer kleiner werden, und die so beschaffen sind, dass sie die Grösse a genauer darstellten, als es irgend ein Bruch grösser als a vermöchte, der mit kleineren Ziffern ausgedrückt wäre.

Auf diese Weise erhalten wir folgende Reihen von Brüchen, die gegen a convergiren.

Brüche mit wachsenden Werthen, kleiner als a:

$$\frac{A}{A_1},\ \frac{B+A}{B_1+A_1},\ \frac{2B+A}{2B_1+A_1},\ \frac{3B+A}{3B_1+A_1},\ \ldots,$$

$$\frac{\gamma B+A}{\gamma B_1+A_1},\ \frac{C}{C_1},\ \frac{D+C}{D_1+C_1},\ \frac{2D+C}{2D_1+C_1},\ \frac{3D+C}{3D_1+C_1},\ \ldots,$$

$$\frac{\varepsilon D+C}{\varepsilon D_1+C_1},\ \frac{E}{E_1},\ \frac{F+E}{F_1+E_1},\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots,\ \ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots,$$

Brüche mit abnehmenden Werthen, grösser als a.

$$\frac{A+1}{1},\ \frac{2A+1}{2},\ \frac{3A+1}{3},\ \ldots,$$

$$\frac{\beta A+1}{\beta},\ \frac{B}{B_1},\ \frac{C+B}{C_1+B_1},\ \frac{2C+B}{2C_1+B_1},\ \ldots$$

$$\frac{\delta C+B}{\delta C_1+B_1},\ \frac{D}{D_1},\ \frac{E+D}{E_1+D_1},\ \ldots,\ \text{u. s. w.}$$

Wenn a irrational oder transcendent ist, so setzen sich vorstehende Reihen ins Unendliche fort, da die Reihe der Brüche

$$\frac{A}{A_1},\ \frac{B}{B_1},\ \frac{C}{C_1},\ \ldots,$$

die wir fortan Hauptbrüche nennen wollen, zum Unterschiede von den Zwischenbrüchen, selbst ins Unendliche fortschreitet (No. 10).

Wenn aber a rational ist und gleich irgend einem Bruche $\frac{V}{V_1}$, so haben wir an der angeführten Stelle gesehen, dass die Reihe abschliesst, und dass der letzte Werth der Reihe der Bruch $\frac{V}{V_1}$ selbst sein wird; folglich wird dieser selbe Bruch auch eine der beiden vorstehenden Reihen abschliessen, aber die andere Reihe könnte sich immer noch ins Unendliche fortsetzen.

Es sei in der That δ der letzte Nenner des Kettenbruches; alsdann wird $\frac{D}{D_1}$ der letzte Hauptbruch sein und die Reihe der Brüche, die grösser sind als a, wird mit diesem $\frac{D}{D_1}$ abschliessen; aber die andere Reihe von Brüchen, kleiner als a, wird bei dem Werthe $\frac{C}{C_1}$, der dem $\frac{D}{D_1}$ vorangeht, abgebrochen; um sie fortzusetzen ist zu überlegen, dass der Nenner ε, der auf δ folgen sollte, gleich unendlich sein wird (No. 3); so dass $\frac{E}{E_1}$, welches dem $\frac{D}{D_1}$ in der Reihe der Hauptbrüche folgen würde, gleich

$$\frac{\infty D + C}{\infty D_1 + C_1} = \frac{D}{D_1}$$

wäre; nach dem Gesetz der Zwischenbrüche könnte man also offenbar zwischen $\frac{C}{C_1}$ und $\frac{E}{E_1}$ eine unendliche Menge von Zwischenbrüchen einschalten, nämlich

$$\frac{D + C}{D_1 + C_1}, \frac{2D + C}{2D_1 + C_1}, \frac{3D + C}{3D_1 + C_1}, \ldots$$

In diesem Falle kann man also nach dem Bruche $\frac{C}{C_1}$ in der ersten Reihe von Brüchen noch unendlich viele Brüche einschalten.

Aufgabe.

19. *Es sei ein Bruch gegeben mit einer grossen Anzahl von Ziffern; es sollen alle Brüche in kleineren Ziffern angegeben werden, die dem wirklichen Werthe so nahe liegen, dass es nicht möglich ist, eine grössere Annäherung zu erzielen ohne Anwendung grösserer Ziffern. Auf Grund der vorstehenden Theorie ist dieses Problem leicht zu lösen.*

Man wird zunächst den gegebenen Bruch in einen Kettenbruch verwandeln nach der in No. 4 gegebenen Methode, indem man alle Werthe nimmt, die kleiner als der gegebene sind, damit die Zahlen β, γ, δ, . . . alle positiv seien; alsdann

bilde man mit Hülfe der Formeln in No. 10 die Brüche $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$; dann wird der letzte derselben nothwendig gleich dem gegebenen Bruche sein, da in diesem Falle der Kettenbruch endlich ist. Diese Bruchwerthe werden abwechselnd kleiner und grösser sein, als der gegebene Bruch und werden folgweise immer grössere Ziffern enthalten; zudem wird ein jeder dieser Brüche sich mehr dem gegebenen Werthe nähern, als es irgend ein anderer Bruch in einfacheren Ziffern thäte. Auf diese Weise würde man alle Brüche erschöpfen, die in kleineren Werthen der Ziffern möglich wären.

Will man die kleineren Näherungswerthe und ebenso die grösseren für sich betrachten, so wird man zwischen die vorhergehenden Brüche so viel Zwischenwerthe als möglich einschalten, und man wird zwei Reihen convergenter Brüche bilden, deren eine nur kleinere, die andere nur grössere Werthe als der vorgelegte Bruch enthält (No. 16, 17 und 18); eine jede dieser Reihen wird für sich dieselben Eigenschaften haben wie die Hauptbrüche $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$; denn in jeder Reihe werden die Brüche in immer grösseren Ziffern sich folgen und in beiden findet eine fortwährende Annäherung an den gegebenen Bruch statt und zwar besser, als es irgend ein anderer Bruch thäte in noch einfacheren Ziffern.

Uebrigens kann es vorkommen, dass sich ein Zwischenbruch der einen Reihe, obwohl in minder einfachen Ziffern ausgedrückt, dem wahren Werthe weniger nähert, als einer der anderen Reihe; darum wird man die Zwischenbrüche nur dann anwenden, wenn die gesuchten Brüche alle kleiner oder alle grösser sein sollen, als der gegebene Bruch.

I. Beispiel.

20. Nach *La Caille* hat das Sonnenjahr $365^t\ 5^h\ 48^m\ 49^s$, und es ist mithin $5^h\ 48^m\ 49^s$ länger als das gemeine Jahr; wäre diese Differenz genau gleich 6 Stunden, so ergäben diese einen Schalttag am Ende von vier gemeinen Jahren; will man aber wissen, nach wie viel gemeinen Jahren diese Differenz genau eine gewisse Anzahl von Tagen ausmacht, so muss man das Verhältniss von 24 Stunden zu $5^h\ 48^m\ 49^s$

bestimmen, und man findet $\frac{86400}{20929}$; so dass man sagen kann, dass nach 86 400 gemeinen Jahren man 20 929 Tage einschalten müsste, um sie in tropische Jahre zu verwandeln.

Da der Bruch $\frac{86400}{20929}$ durch sehr grosse Ziffern ausgedrückt ist, so soll man in kleineren Ziffern Verhältnisse darstellen, die sich so viel als möglich jenem nähern.

Man wird also $\frac{86400}{20929}$ in einen Kettenbruch entwickeln nach der in No. 4 gegebenen Regel, die übereinstimmt mit der Regel, den grössten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu finden: man erhält

20929	86400	$4=\alpha$								
	83716									
	2684	20929	$7=\beta$							
		18788								
		2141	2684	$1=\gamma$						
			2141							
			543	2141	$3=\delta$					
				1629						
				512	543	$1=\varepsilon$				
					512					
					31	512	$16=\zeta$			
						496				
						16	31	$1=\eta$		
							16			
							15	16	$1=\vartheta$	
								15		
								1	15	$15=\iota$
									15	
									0.	

Da man nun alle Quotienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ kennt, so ist es leicht, die Reihe $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \ldots,$ zu bilden:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 7, & 1, & 3, & 1, & 16, & 1, & 1, & 15, \\ \frac{4}{1}, & \frac{29}{7}, & \frac{33}{8}, & \frac{128}{31}, & \frac{161}{39}, & \frac{2704}{655}, & \frac{2865}{694}, & \frac{5569}{1349}, & \frac{86400}{20929}, \end{array}$$

und man erkennt, dass der letzte Bruch gleich dem gegebenen ist.

Um das Einrichten dieser Brüche zu vereinfachen, schreibt man zuerst, wie ich es vorstehend gethan habe, die Reihe der Quotienten 4, 7, 1, ..., und schreibt unter diese Coefficienten die Brüche $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, ..., die sich ergeben.

Der erste Bruch wird immer als Zähler diejenige Zahl haben, die als erster Quotient auftritt und als Nenner die Einheit.

Der zweite hat als Zähler das Product aus dem ersten in den zweiten Quotienten und der Einheit, und als Nenner den zweiten Quotienten selbst.

Der dritte hat als Zähler das Product des dritten Quotienten mit dem Zähler des zweiten Bruches, vermehrt um den Zähler des ersten Bruches, und als Nenner das Product des dritten Quotienten mit dem Nenner des zweiten Bruches, vermehrt um den Nenner des ersten Bruches.

Im Allgemeinen wird jeder Bruch als Zähler das Product aus dem entsprechenden Quotienten mit dem Nenner des vorhergehenden Näherungsbruches, vermehrt um den Zähler des nächst vorhergehenden Näherungsbruches haben, und als Nenner das Product dieses selben Quotienten mit dem vorhergehenden Nenner, vermehrt um den Nenner des diesem vorhergehenden Bruches. Also kommt:

$$29 = 7.4 + 1, \quad 7 = 7, \quad 33 = 1.29 + 4, \quad 8 = 1.7 + 1,$$
$$128 = 3.33 + 29, \quad 31 = 3.8 + 7,$$

u. s. f.; und dieses stimmt mit den Formeln in No. 10 überein.

Man ersieht jetzt aus den Brüchen $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, ..., dass die einfachste Schaltung diejenige von einem Jahre nach vier Jahren ist, und diese ist die Grundlage des Julianischen Kalenders; aber man würde sich der Wahrheit mehr nähern, wenn man 7 Tage nach 29 Jahren einschaltete oder 8 Tage in 33 Jahren u. s. f.

Ferner bemerkt man, dass, da die Brüche $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, abwechselnd kleiner und grösser sind als der gegebene Bruch $\frac{86400}{20929}$ oder $\frac{24^{h}}{5^{h}\ 48^{m}\ 49^{s}}$, die Einschaltung von einem Tage auf vier Jahre zu stark ist, die von 7 Tagen auf 29 Jahre zu gering, die von 8 Tagen auf 33 Jahre zu stark, u. s. f.; aber eine jede folgende Schaltung ist die genaueste für den entsprechenden Zeitraum.

Bildet man nun zwei besondere Reihen der aufsteigenden und der absteigenden Werthe, so kann man noch verschiedene Brüche zur Vervollständigung der Reihen einschalten; man wird ebenso wie vorhin verfahren, indem man nur folgweise an Stelle eines jeden der Quotienten alle ganzen Zahlen nimmt, die kleiner als dieser Quotient sind (falls es welche giebt).

Betrachtet man zuerst die Reihe zunehmender Bruchwerthe

$$\begin{array}{ccccc} & 1, & 1, & 1, & 15, \\ \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{161}{39}, & \frac{2865}{694}, & \frac{86400}{20929}, \end{array}$$

so erkennt man, dass, da die Quotienten beim zweiten, dritten und vierten gleich 1 sind, sich kein Bruch einschalten lässt; da aber der letzte Quotient gleich 15 ist, so wird man 14 Brüche einschalten können, deren Zähler die arithmetische Reihe bilden werden:

$$2865 + 5569, \quad 2865 + 2.5569, \quad 2865 + 3.5569, \ldots,$$

und deren Nenner auch eine solche bilden

$$694 + 1349, \quad 694 + 2.1349, \quad 694 + 3.1349, \ldots$$

Hierdurch erhält man die vollständige Reihe wachsender Brüche

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{8434}{2043}, \frac{14003}{3392}, \frac{19572}{4741}, \frac{25141}{6090}, \frac{30710}{7439}, \frac{36279}{8788}, \frac{41848}{10137},$$
$$\frac{47417}{11486}, \frac{52986}{12835}, \frac{58555}{14184}, \frac{64124}{15533}, \frac{69693}{16882}, \frac{75262}{18231}, \frac{80831}{19580}, \frac{86400}{20929}.$$

Da der letzte Bruch zugleich der gegebene ist, so kann diese Reihe offenbar nicht weiter fortgesetzt werden.

Hieraus ersieht man, dass, wenn man nur überschüssige Schaltungen machen will, die einfachsten und genauesten die von einem Tage auf 4 Jahre und von 8 Tagen auf 33 Jahre, oder von 39 Tagen auf 161 Jahre sein werden und so fort.

Betrachten wir nun die abnehmende Reihe

$$\begin{array}{cccc} 7, & 3, & 16, & 1 \\ \frac{29}{7}, & \frac{128}{31}, & \frac{2704}{655}, & \frac{5569}{1349}, \end{array}$$

so kann man wegen des ersten Quotienten 7 sechs andere Brüche vorher einschalten, deren Zähler die arithmetische Reihe $4+1,\ 2.4+1,\ 3.4+1, \ldots,$ bilden und deren Nenner die Reihe $1, 2, 3, \ldots$ geben; ebenso wird wegen des Quotienten 3 die Einschaltung zweier Brüche, dann weiterhin 15, wegen des Quotienten 16; aber nach diesem kann, weil der Quotient 1 folgt, keine Schaltung statthaben.

Man bemerke ferner, dass, da die vorstehende Reihe nicht mit dem gegebenen Bruche abschliesst, man sie noch beliebig weit fortsetzen kann, wie das in No. 18 erläutert wurde. Man erhält auf diese Weise folgende Reihe von abnehmenden Brüchen:

$$\frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \frac{21}{5}, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{62}{15}, \frac{95}{23}, \frac{128}{31}, \frac{289}{70}, \frac{450}{109}, \frac{611}{148}, \frac{772}{187}, \frac{933}{226},$$

$$\frac{1094}{265}, \frac{1255}{304}, \frac{1416}{343}, \frac{1577}{382}, \frac{1738}{421}, \frac{1899}{460}, \frac{2060}{499}, \frac{2221}{538}, \frac{2382}{577}, \frac{2543}{616}, \frac{2704}{655}, \frac{5569}{1349},$$

$$\frac{91969}{22278}, \frac{178369}{43207}, \frac{264769}{64136}, \frac{351169}{85065}, \frac{437569}{105994}, \ldots;$$

diese sind alle kleiner als der gegebene Bruch und sie nähern sich demselben mehr als jeder andere Bruch mit einfacheren Ziffern.

Man kann daraus entnehmen, dass, wenn man nur auf diejenigen Schaltweisen Rücksicht nimmt, bei denen die Schaltung zu klein ist, der einfachste und genaueste Fall der von einem Schalttage auf fünf Jahre wäre oder von zwei Tagen auf neun Jahre oder von drei Tagen auf dreizehn Jahre u. s. f.

Beim gregorianischen Kalender schaltet man bloss 97 Tage ein in 400 Jahren; die vorstehende Tabelle zeigt, dass man viel grössere Genauigkeit erreichte durch Einschaltung von 109 Tagen in 450 Jahren.

Es ist bemerkenswerth, dass man bei Einführung des gregorianischen Kalenders der Berechnung der Jahreslänge eine Angabe von Copernicus zu Grunde legte, nämlich $365^t\ 5^h\ 49^m\ 40^s$. Auf Grund dieser Angabe hätte man nicht den Bruch $\frac{86400}{20929}$, sondern $\frac{86400}{20960}$ oder $\frac{540}{131}$; hiernach ergäben sich nach der vorigen Methode die Quotienten 4, 8, 5, 3, und daher die Hauptbrüche

$$\begin{array}{cccc} 4, & 8, & 5, & 3, \\ \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{169}{41}, & \frac{540}{131}, \end{array}$$

welche, abgesehen von den beiden ersten, ziemlich stark abweichen von den vorhin gefundenen. Dennoch trifft man hier auf keinen Bruch $\frac{400}{97}$, der dem gregorianischen Kalender zu Grunde liegt; und selbst unter den Einschaltungen in den beiden Reihen: $\frac{4}{1}$, $\frac{169}{41}$ und $\frac{33}{8}$, $\frac{540}{131}$ kann er nicht vorkommen; denn die Einschaltung könnte offenbar nur zwischen den beiden letzteren Werthen statthaben; da nun der Quotient gleich 3 ist, so könnten sich nur zwei Schaltungen ergeben, nämlich $\frac{202}{49}$ und $\frac{371}{90}$; man sieht also, dass man eine genauere Schaltung bei der gregorianischen Reformation getroffen hätte, wenn man 90 Tage in 371 Jahren vorgeschrieben hätte.

Reducirt man den Bruch $\frac{400}{97}$ auf einen Zähler gleich 86400, so käme $\frac{86400}{20952}$, entsprechend einem tropischen Jahre von $365^{t}\ 5^{h}\ 49^{m}\ 12^{s}$. Bei solcher Jahreslänge wäre die gregorianische Schaltung vollkommen genau; da aber das Jahr nach den Beobachtungen um 20 Secunden kürzer ist, wird man offenbar nach einer gewissen Zeit eine neue Schaltung vornehmen müssen.

Will man an *La Caille*'s Bestimmung festhalten, so erkennt man, dass, da der Nenner 97 des Bruches $\frac{400}{97}$ sich zwischen den Nennern des fünften und sechsten Hauptbruches befindet, der Bruch $\frac{161}{39}$ sich mehr der Wahrheit näherte als $\frac{400}{97}$; da übrigens die Astronomen noch verschiedener Meinung sind in Hinsicht auf die Jahreslänge, so wollen wir keine weitere Ansicht äussern; auch wollten wir vorstehend nur nachweisen, welchen Vortheil man vom Gebrauch der Kettenbrüche ziehen kann; deshalb fügen wir noch ein Beispiel hinzu.

II. Beispiel.

21. Wir haben schon in No. 8 den Kettenbruch gegeben, der das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser ausdrückt, sofern die Angabe von *Ludolph* zu Grunde gelegt wird; man braucht also nur gerade so wie im vorigen Beispiele die Reihe der gegen diese Grenze convergirenden Brüche zu berechnen und erhält:

$$3,\quad 7,\quad 15,\quad 1,\quad 292,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 1,$$

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \frac{312689}{99532},\ \frac{833719}{265381},\ \frac{1146408}{364913},$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3, & 1, & 14, & 2, & 1, & 1, & 2, \\ \frac{4272943}{1360120}, & \frac{5419351}{1725033}, & \frac{80143857}{25510582}, & \frac{165707065}{52746197}, & \frac{245850922}{78256779}, & \frac{411557987}{131002976}, & \frac{1068966896}{340262731}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 2, & 2, & 1, & 84, & 2, \\ \frac{2549491779}{811528438}, & \frac{6167950454}{1963319607}, & \frac{14885392687}{4738167652}, & \frac{21053343141}{6701487259}, & \frac{1783366216531}{567663097408}, & \frac{3587785776203}{1142027682075}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 1, & 15, & 3, & 13, \\ \frac{5371151992734}{1709690779483}, & \frac{8958937768937}{2851718461558}, & \frac{139755218526789}{44485467702853}, & \frac{428224593349304}{136308121570117}, & \frac{5706674932067741}{1816491048114374}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1, & 4, & 2, & 6, \\ \frac{6134899525417045}{1952799169684491}, & \frac{30246273033735921}{9627687726852338}, & \frac{66627445592888887}{21208174623389167}, & \frac{430010946591069243}{136876735467187340}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 6, & 1, \\ \frac{2646693125139304345}{842468587426513207}, & \frac{3076704071730373588}{979345322893700547}. \end{array}$$

Diese Brüche sind abwechselnd kleiner und grösser als der wahre Werth des Verhältnisses, d. h. $\frac{3}{1}$ ist kleiner, $\frac{22}{7}$ grösser u. s. f., und jeder dieser Brüche nähert sich dem wahren Werthe besser, als es irgend ein anderer Bruch mit kleineren Ziffern thut, oder allgemeiner, der einen kleineren Nenner hat als der folgende Bruch; so dass man versichern kann, der Bruch $\frac{3}{1}$ komme der Wahrheit näher als irgend ein Bruch mit einem Nenner kleiner als 7; ebenso nähert sich $\frac{22}{7}$ besser der Wahrheit als irgend ein Bruch mit einem Nenner kleiner als 106; ähnlich steht es mit den anderen Werthen.

Der Fehler eines jeden Hauptbruches wird stets kleiner sein als die Einheit, dividirt durch das Product des Nenners dieses Bruches mit dem Nenner des folgenden. So ist der Fehler von $\frac{3}{1}$ kleiner als $\frac{1}{7}$, der von $\frac{22}{7}$ kleiner als $\frac{1}{7 \cdot 106}$ u. s. f., aber zugleich wird der Fehler eines jeden Bruches grösser sein als die Einheit, dividirt durch das Product dieses Nenners mit der Summe dieses und des folgenden Nenners; so dass der Fehler des Bruches $\frac{3}{1}$ grösser ist als $\frac{1}{8}$, der von $\frac{22}{7}$ grösser als $\frac{1}{7 \cdot 113}$ u. s. f. . . . (No. 14).

Wollte man nun die kleineren Näherungswerthe von den grösseren trennen, so könnte man, durch passende Einschaltung, zwei Reihen von Brüchen, eine zu- und eine abnehmende, bilden und erhielte auf diese Weise:

Brüche kleiner als π.

$$\frac{3}{1},\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \frac{69}{22},\ \frac{91}{29},\ \frac{113}{36},\ \frac{135}{43},\ \frac{157}{50},\ \frac{179}{57},\ \frac{201}{64},\ \frac{223}{71},\ \frac{245}{78},\ \frac{267}{85},\ \frac{289}{92},\ \frac{311}{99},$$

$$\frac{333}{106},\ \frac{688}{219},\ \frac{1043}{332},\ \frac{1398}{445},\ \frac{1753}{558},\ \frac{2108}{671},\ \frac{2463}{784},\ \ldots$$

Brüche grösser als π.

$$\frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{355}{113},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{312689}{99532},\ \frac{1146408}{364913},\ \frac{5419351}{1725033},$$

$$\frac{85563208}{27235615},\ \frac{165707065}{52746197},\ \frac{411557987}{131002976},\ \frac{1480524883}{471265707},\ \ldots$$

Jeder Bruch der ersten Reihe nähert sich besser dem wahren Werthe, als es irgend ein Bruch mit kleineren Ziffern thut, der zugleich unter dem vorgesetzten Werthe bleibt; und jeder Bruch der zweiten Reihe nähert sich mehr, als es irgend ein anderer Bruch mit kleinerem Nenner thut, dessen Werth grösser ist als der wahre.

Uebrigens würden diese Reihen sehr umfangreich werden, wenn wir sie so weit entwickeln wollten, wie vorstehende Hauptbrüche es ermöglichten. Die dieser Abhandlung gesteckten Grenzen gestatten uns nicht dieselben hier wiederzugeben; man findet sie aber im IX. Kapitel der *Algebra* von *Wallis* (*Operum mathemat.* vol. II).

Bemerkung.

22. Die erste Lösung dieses Problems hat *Wallis* gegeben in einer kleinen Abhandlung, die er den posthumen Werken von *Horrocius* hinzugefügt hat; man findet sie an dem angeführten Orte in seiner Algebra; aber die Methode dieses Autors ist eine indirecte und sehr schwerfällige. Die von uns vorgetragene stammt von *Huyghens*, und man muss sie für eine der Hauptentdeckungen dieses grossen Geometers halten. Es scheint, als habe die Construction seines planetarischen Automaten den Anlass gegeben. In der That, wollte man genau die Bewegungen und die Perioden der Planeten ausdrücken, so müsste man Räder anwenden, bei denen die Zahlen der Zähne genau in demselben Verhältniss stehen wie die fraglichen

Perioden; da man aber nicht die Anzahl der Zähne über ein gewisses Maass hinaus vermehren kann, welches von der Grösse des Rades abhängt, und da die Perioden der Planeten incommensurabel sind oder wenigstens genau nur durch eine grosse Anzahl von Ziffern wiedergegeben werden können, so muss man sich zu einer Annäherung entschliessen und die Schwierigkeit besteht darin, Verhältnisse in kleineren Ziffern anzugeben, die sich möglichst der Wahrheit nähern und zwar besser, als es irgend ein Bruch mit kleinern Ziffern thäte.

Huyghens löst diese Aufgabe, wie wir, durch Kettenbrüche; er lehrt dieselben durch fortgesetzte Division bilden und deckt dann die Haupteigenschaften der convergirenden Brüche auf, ja sogar mit Beachtung der Zwischenbrüche. (Vergl. seine Opera posthuma, die Abhandlung: Descriptio automati planetarii).

Andere grosse Geometer haben nachher die Kettenbrüche allgemeiner behandelt. Man findet namentlich in den Petersburger Commentarien (Bd. IX u. XI der älteren und Bd. IX u. XI der neueren) Abhandlungen von *Euler* über diesen Gegenstand, die sehr gelehrt und geistreich sind; aber die arithmetische Seite der Theorie, die besonders interessant ist, hat noch nicht die verdiente Beachtung gefunden: das war der Anlass zu dieser kleinen Abhandlung, die die Geometer mit jener Theorie vertraut machen sollte. (Vergl. auch Berliner Abhandlungen von 1767 und 1768*).

Es findet übrigens diese Theorie eine umfangreiche Anwendung in der gesammten Arithmetik, und wenig Probleme dieses Gebietes, wenigstens unter denen, die mit gewöhnlichen Methoden nicht gelöst werden können, giebt es, die nicht direct oder indirect mit ihr zusammenhängen. *Johann Bernoulli* hat soeben eine glückliche und nützliche Anwendung gemacht in einem neuen Calcul, den er sich ersann zur Ausrechnung der Proportionaltheile bei Tabellen. (Vergl. Band I seines Recueil pour les Astronomes).

---

*) Œuvres de *Lagrange*, t. II, p. 538 und 581.

§ II. Methoden zur Bestimmung der ganzen Zahlen, die Minima der unbestimmten Formen mit zwei Unbekannten ergeben.

Die Fragen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen und für welche wir directe und allgemeine Methoden geben wollen, sind völlig neu in der unbestimmten Analysis. Man hatte bisher diese Analyse nicht auf die Probleme der Maxima und Minima bezogen; wir wollen hier die Minima der ganzen homogenen rationalen Brüche mit zwei Unbekannten bestimmen, wenn diese Unbekannten ganze Zahlen sein sollen. Diese Untersuchung wird uns wieder auf die Theorie der Kettenbrüche führen, und wird dazu dienen, dieser Theorie einen höheren Grad von Vollkommenheit zu geben.

I. Aufgabe.

23. *Es sei eine positive Grösse a gegeben, y und z seien ganze positive Zahlen, die relativ zu einander prim sind; man verlangt die Werthe dieser Zahlen, die den Ausdruck $y - az$, abgesehen vom Zeichen, zu einem Minimum machen im Vergleich mit allen kleineren Zahlen, die man sonst noch für y und z setzen könnte.*

Es seien p und q zwei ganze relativ prime Zahlen, die, für y und z eingesetzt, die Form $y - az$ kleiner ausfallen lassen, als wenn man irgend andere kleinere Zahlen als p und q einsetzte. Nennt man also r und s irgend zwei positive relativ prime Zahlen, die aber kleiner sind als p und q, so soll, abgesehen vom Vorzeichen, $p - aq$ kleiner sein als $r - as$, d. h. beide Grössen positiv genommen. Wählen wir r und s so, dass $ps - qr = \pm 1$ ist, wobei das obere Zeichen für $p - aq$ positiv und das untere für $p - aq$ negativ gilt. (Wir werden bald sehen, dass es stets Zahlen giebt, die dieser Bedingung genügen.) Ich werde nun beweisen, dass die anderen Zahlen, kleiner als p und q, die man für y und z einsetzen könnte, den Ausdruck $y - az$, abgesehen vom Zeichen grösser als $p - aq$ und als $r - as$ werden lassen.

In der That kann man allgemein annehmen, dass

$$y = pt + ru, \quad z = qt + su$$

sei, wo t und u zwei Unbekannte sind; durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man aber

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps};$$

folglich, weil $ps - qr = \pm 1$,

$$t = \pm (sy - rz), \quad u = \pm (qy - pz);$$

woraus erhellt, dass t und u stets ganze Zahlen sein werden, da p, q, r, s, y und z es sind.

Da nun t und u ganze, und p, q, r, s ganze positive Zahlen sind, so ist es klar, dass, wenn y und z kleiner sein sollen, als p und q, t und u verschiedene Zeichen haben müssen.

Bemerken wir nun, dass auch $r - as$ ein anderes Zeichen haben wird, als $p - aq$; denn es sei $p - aq = P$ und $r - as = R$, so wird

$$\frac{p}{q} = a + \frac{P}{q}, \quad \frac{r}{s} = a + \frac{R}{s};$$

aber die Beziehung $ps - qr = \pm 1$ giebt $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \pm \frac{1}{qs}$; folglich ist

$$\frac{P}{q} - \frac{R}{s} = \pm \frac{1}{qs};$$

und da das Doppelzeichen conform mit dem von $p - aq$ oder P vorausgesetzt wird, so muss $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ positiv sein, wenn P positiv ist, und negativ, wenn P negativ ist; da nun $s < q$ und $R > P$ (Voraussetzung), so ist um so mehr $\frac{R}{s} > \frac{P}{q}$, abgesehen vom Zeichen; also hat $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ immer ein anderes Zeichen als $\frac{R}{s}$, d. h. als R, da s positiv ist; mithin haben P und R verschiedene Zeichen.

Dieses vorausgeschickt erhält man durch Einsetzung von y und z in obige Werthe,

$$y - az = (p - aq)\,t + (r - as)\,u = Pt + Ru;$$

da aber t und u ebenso wie P und R verschiedene Zeichen haben, so sind Pt und Ru von gleichem Zeichen; da ferner t und u ganze Zahlen sind, so wird offenbar der Werth von

$y - az$ stets grösser sein als P und als R, d. h. als die Werthe von $p - aq$ und von $r - as$, abgesehen vom Zeichen.

Es bleibt aber noch übrig, zu untersuchen, ob man, wenn p und q gegeben sind, immer Zahlen r und s finden könne, die kleiner sind als jene, und zwar solche, die $ps - qr = \pm 1$ ergeben bei beliebiger Annahme des Doppelzeichens; dies folgt aber aus der Theorie der Kettenbrüche; man kann es aber auch direct und unabhängig von dieser Theorie beweisen. Die Schwierigkeit besteht darin zu zeigen, dass es eine ganze positive Zahl giebt kleiner als p, die für r eingesetzt den Ausdruck $qr \pm 1$ durch p theilbar erscheinen lässt; angenommen man setze folgweise für r die Reihe der natürlichen Zahlen ein 1, 2, 3, . . . bis p und man theile $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1, \ldots, pq \pm 1$ durch p, so erhält man p Reste kleiner als p, die sämmtlich von einander verschieden sein werden; denn wenn z. B. $mq \pm 1$ und $nq \pm 1$ (wo m und n verschiedene ganze Zahlen bedeuten, die nicht grösser als p sind) durch p getheilt denselben Rest gäbe, so müsste auch ihre Differenz $(m - n)\, q$ durch p theilbar sein; allein das kann nicht sein, weil q relativ prim gegen p und $m - n$ kleiner ist als p. Da nun alle Reste ganze positive Zahlen kleiner als p sind, und sämmtlich von einander verschieden, und da es p Reste giebt, so muss offenbar die Null unter diesen Resten vorkommen und mithin muss eine der Zahlen $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1, \ldots, pq \pm 1$ durch p theilbar sein; nun kann das offenbar nicht die letzte dieser Zahlen sein, folglich giebt es sicher einen Werth von r kleiner als p, der $rq \pm 1$ durch p theilbar macht; der Quotient wird zugleich offenbar kleiner als q sein; also wird es stets einen ganzen positiven Werth von r kleiner als p geben und einen anderen Werth von s kleiner als q, die den Gleichungen genügen:

$$s = \frac{qr \pm 1}{p}, \text{ oder } ps - qr = \pm 1.$$

24. Man ersieht aus Vorstehendem, dass unter den Zahlen, die kleiner sind als p und q, die Zahlen r und s die Form $y - az$ zum Minimum machen.

Zur Vereinfachung wollen wir die Zahlen r und s mit p_1 und q_1 bezeichnen, dann hat man die Bedingung $pq_1 - qp_1 = \pm 1$, und die Grössen $p - aq$, $p_1 - aq_1$ werden die zwei sich folgenden Minima in der Reihe der Werthe für $y - az$ sein, die man erhält, wenn man für y und z alle Zahlen nimmt,

die nicht p und q übertreffen: diese Minima werden verschiedene Zeichen haben und das zweite wird unmittelbar das erste übertreffen.

Man kann ebenso zwei andere Zahlen p_2 und q_2 finden, die kleiner als p_1 und q_1 sind, und die zu diesen dieselbe Beziehung haben, wie p_1 und q_1 zu p und q. Da nun $p_1 - aq_1$ entgegengesetztes Zeichen hat, wie $p - aq$, so muss man $p_1 q_2 - q_1 p_2 = \pm 1$ machen; die Grösse $p_2 - aq_2$ wird entgegengesetztes Zeichen haben, wie $p_1 - a q_1$ und wird grösser sein; aber zugleich wird sie kleiner als jeder andere Werth von $y - az$ sein, so lange y und z kleiner sind als p_1 und q_1. Setzt man dieselbe Ueberlegung fort, so wird man auch Zahlen p_3, q_3, kleiner als p_2, q_2 finden, so dass

$$p_2 q_3 - q_2 p_3 = \pm 1,$$

die zugleich dem Werth $p_3 - aq_3$ entgegengesetztes Zeichen ertheilen, wie $p_2 - aq_2$ und grösser als $p_2 - aq_2$, aber kleiner, als wenn man für p_3 und q_3 andere Werthe kleiner als p_2 und q_2 nähme, u. s. f.

Auf diese Weise erhält man zwei Reihen von abnehmenden ganzen Zahlen, $p, p_1, p_2, p_3 \ldots, q, q_1, q_2, q_3, \ldots$, so dass

$$\begin{aligned} p\, q_1 - q\, p_1 &= \pm 1, \\ p_1 q_2 - q_1 p_2 &= \pm 1, \\ p_2 q_3 - q_2 p_3 &= \pm 1, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \end{aligned}$$

die folgweise die Minima

$$p - aq, \; p_1 - aq_1, \; p_2 - aq_2, \; p_3 - aq_3, \ldots,$$

für die Form $y - az$ ergeben; diese Minima werden abwechselnd von verschiedenen Zeichen sein und eine zunehmende Reihe bilden, so wie jeder Ausdruck von der Form $p - aq$ ein Minimum sein wird in Hinsicht auf die Werthe von y und z, kleiner als p und q.

Hieraus folgt, dass die correspondirenden Werthe der zwei Reihen $p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2, \ldots$, analoge Eigenschaften haben und das ganze vorgelegte Problem lösen.

Es handelt sich also nur noch darum, die beiden Reihen zu bilden.

Dazu bemerke man: 1. dass man durch Addition der Gleichungen

$$pq_1 - qp_1 = \pm 1, \quad p_1 q_2 - q_1 p_2 = \mp 1,$$

erhält:

$$(p - p_2)\, q_1 - (q - q_2)\, p_1 = o, \quad \text{also} \quad q_1 (p - p_2) = p_1 (q - q_2);$$

und da diese Gleichung in ganzen Zahlen bestehen muss, und da p_1 und q_1 relativ prim sind wegen $pq_1 - qp_1 = \pm 1$, so ist $p - p_2$ durch p_1 theilbar; es sei μ der Quotient dieser Division, so wird

$$p - p_2 = \mu p_1, \quad \text{und} \quad p = \mu p_1 + p_2;$$

die Gleichung geht daher über in

$$\mu q_1 = q - q_2, \quad \text{woraus} \quad q = \mu q_1 + q_2.$$

Durch Verbindung der Gleichungen

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 = \mp 1, \quad p_2 q_3 - q_2 p_3 = \pm 1$$

findet man auf Grund ähnlicher Ueberlegungen:

$$p_1 = \mu_1 p_2 + p_3, \quad q_1 = \mu_1 q_2 + q_3,$$

wo μ eine ganze Zahl ist, u. s. f.

Das Gesetz der beiden Reihen ist also das folgende:

$$\begin{aligned}
p &= \mu\, p_1 + p_2, & q &= \mu\, q_1 + q_2, \\
p_1 &= \mu_1 p_2 + p_3, & q_1 &= \mu_1 q_2 + q_3, \\
p_2 &= \mu_2 p_3 + p_4, & q_2 &= \mu_2 q_3 + q_4, \\
p_3 &= \mu_3 p_4 + p_5, & q_3 &= \mu_3 q_4 + q_5, \\
&\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

wo μ, μ_1, μ_2, ... sämmtlich positiv sind, und die Zahlen $p, p_1, p_2, p_3, \ldots, q, q_1, q_2, q_3, \ldots$, zwei continuirlich abnehmende Reihen bilden.

Aus diesem Gesetz erkennt man, dass es genügen wird, die Zahlen μ, μ_1, μ_2, ... zu kennen, um alle Werthe der beiden Reihen zu finden, sobald man nur die beiden letzten Glieder kennt.

Die Einsetzung vorstehender Werthe ergiebt:

$$\begin{aligned} p - aq &= \mu\ (p_1 - aq_1) + p_2 - aq_2\,, \\ p_1 - aq_1 &= \mu_1 (p_2 - aq_2) + p_3 - aq_3\,, \\ p_2 - aq_2 &= \mu_2 (p_3 - aq_3) + p_4 - aq_4\,, \\ p_3 - aq_3 &= \mu_3 (p_4 - aq_4) + p_5 - aq_5\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{p - aq}{p_1 - aq_1} + \frac{aq_2 - p_2}{p_1 - aq_1}, \\ \mu_1 &= \frac{p_1 - aq_1}{p_2 - aq_2} + \frac{aq_3 - p_3}{p_2 - aq_2}, \\ \mu_2 &= \frac{p_2 - aq_2}{p_3 - aq_3} + \frac{aq_4 - p_4}{p_3 - aq_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir haben oben gesehen, dass die Grössen $p - aq$, $p_1 - aq_1$, $p_2 - aq_2$, ... eine Reihe von Werthen geben, die stets anwachsen und die abwechselnd positiv und negativ sind; daraus folgt, dass die Brüche $\frac{p - aq}{p_1 - aq_1}, \frac{p_1 - aq_1}{p_2 - aq_2}, \frac{p_2 - aq_2}{p_3 - aq_3}, \ldots$ alle negativ und kleiner als 1 sind, während im Gegentheil die Brüche $\frac{aq_2 - p_2}{p_1 - aq_1}, \frac{aq_3 - p_3}{p_2 - aq_2}$ alle positiv und grösser als 1 sind. Da nun die ersteren zwischen 0 und -1 liegen, so kann man diese Grenzwerthe an ihrer Statt einsetzen, woraus sich ergiebt:

$$\begin{aligned} \mu &< \frac{aq_2 - p_2}{p_1 - aq_1} > \frac{aq_2 - p_2}{p_1 - aq_1} - 1\,, \\ \mu_1 &< \frac{aq_3 - p_3}{p_2 - aq_2} > \frac{aq_3 - p_3}{p_2 - aq_2} - 1\,, \\ \mu_2 &< \frac{aq_4 - p_4}{p_3 - ap_3} > \frac{aq_4 - p_4}{p_3 - aq_3} - 1\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Offenbar genügen diese Grenzen, um die μ-Werthe zu bestimmen, da man weiss, dass sie sämmtlich ganze Zahlen sein müssen. Es wird nunmehr die Bestimmung von μ nur von

den vier Werthen von p_1, p_2, q_1, q_2, die von μ_1 nur von p_2, p_3, q_2, q_3, abhängen u. s. f.; kennt man also die Werthe von p_1, p_2 und q_1, q_2, so findet man zunächst μ, dann erhält man p und q durch die Formeln $p = \mu p_1 + p_2$, $q = \mu q_1 + q_2$, die vorstehend gegeben sind.

Ebenso, wenn man nur die Werthe von p_2, p_3, q_2, q_3 kennt, so findet man zunächst μ_1 durch die Bedingung

$$\mu_1 < \frac{aq_3 - p_3}{p_2 - aq_2} > \frac{aq_3 - p_3}{p_2 - aq_2} - 1,$$

und dann erhält man p_1, q_1 durch die Formeln $p_1 = \mu p_2 + p_3$, $q_1 = \mu_1 q_2 + q_3$; alsdann findet man μ und schliesslich p und q, u. s. f.

Aus Vorstehendem erhellt, dass es genügt, die beiden letzten Ausdrücke einer jeden der beiden correspondirenden Reihen p, p_1, p_2, p_3, ..., und q, q_1, q_2, q_3, ..., zu kennen, um von diesen aus folgweise zu allen anderen Werthen aufzusteigen und die vollständigen beiden Reihen herzustellen.

Die Aufgabe ist nun zurückgeführt auf die Aufsuchung der beiden letzten Glieder der Reihen.

Hierzu bemerke ich zunächst, dass sie, ihrer Eigenheit gemäss, beide mit 0 endigen müssen; denn die Formeln $p = \mu p_1 + p_2$, $p_1 = \mu p_2 + p_3$, ..., lassen erkennen, dass μ der Quotient und p_2 der Rest der Division von p durch p_1 ist u. s. f., so dass p_2, p_3, ... die Reste sind, die man erhält, wenn man den grössten gemeinschaftlichen Theiler zwischen p und p_1, die relativ prim gegen einander sind, aufsucht; man muss daher nothwendig auf einen Rest 0 stossen. Dasselbe gilt von den Zahlen q_2, q_3, ..., die die verschiedenen Reste sind, die man bei Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers zwischen q und q_1 findet.

Angenommen nun, die Reihe q, q_1, q_2, ... schliesse früher ab als die entsprechende p, p_1, p_2, ..., und es sei z. B. $q_4 = 0$; alsdann reducirt sich die Gleichung $p_3 q_4 - q_3 p_4 = \mp 1$ auf $q_3 p_4 = \pm 1$, und, weil q_3 und p_4 nur positive ganze Zahlen sein können, folgt $q_3 = 1$ und $p_4 = 1$; ferner gehen die beiden Ausdrücke $p_3 - aq_3$, $p_4 - aq_4$ über in $p_3 - a$ und 1. Aber wir haben gesehen, dass diese beiden Grössen entgegengesetzte Zeichen haben müssen und dass, abgesehen vom Zeichen, der zweite Werth grösser sein muss als der erste, da es zwei auf-

einander folgende Werthe der Reihe der Minima sind, mithin muss $a - p_3 > 0$ und < 1 sein, folglich ist

$$p_3 < a \text{ und } > a - 1.$$

Auf diese Weise erhält man p_3, denn da es eine ganze Zahl sein muss, so ist es diejenige, die zwischen a und $a - 1$ liegt.

Im Allgemeinen also werden im fraglichen Falle die beiden letzten Glieder der Reihe $q, q_1, q_2, \ldots = 1, 0$ sein; und die entsprechenden der Reihe $p, p_1, p_2, \ldots$, werden α, 1 sein, wenn α die ganze zwischen a und $a - 1$ fallende Zahl bedeutet.

Angenommen nun, die Reihe $p, p_1, p_2, \ldots$ schliesse zuerst ab und es sei z. B. $p_4 = 0$; alsdann wird aus $p_3 q_4 - q_3 p_4 = \mp 1$, nunmehr $p_3 q_4 = \mp 1$, und, weil p_3 und q_4 ganze positive Zahlen sind, $p_3 = 1$, $q_4 = 1$; so dass die beiden Grössen $p_3 - a q_3$, $p_4 - a q_4$, die entgegengesetztes Zeichen haben müssen, wobei der zweite Werth den ersten übertreffen muss, gleich $1 - a q_3$ und $-a$ sind; folglich muss $1 - a q_3 > 0$ und $< a$ sein; das ergiebt $q_3 < \frac{1}{a}$ und $q_3 + 1 > \frac{1}{a}$, mithin

$$q_3 < \frac{1}{a} \text{ und } > \frac{1}{a} - 1;$$

d. h. q_3 ist die zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a} - 1$ fallende Zahl.

Im Allgemeinen also werden in diesem zweiten Falle die beiden letzten Werthe der Reihe $p, p_1, p_2, \ldots$, gleich 1, 0 sein; und die entsprechenden der Reihe $q, q_1, q_2, \ldots, \beta, 1$, wo β die ganze zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a} - 1$ fallende Zahl bedeutet.

Man ersieht hieraus, dass der erste Fall eintreten wird, wenn a grösser als 1, und der zweite, wenn a kleiner als 1 ist.

Kennt man nun die beiden letzten Glieder der correspondirenden Reihen $p, p_1, p_2, \ldots$ und $q, q_1, q_2, \ldots$, so kann man mit Hülfe der oben entwickelten Formeln folgweise aufsteigend alle Glieder der Reihen finden, die zur Lösung der Aufgabe führen.

25. Es ist bequemer diese Reihen rückwärts zu betrachten, indem man mit den letzten Gliedern beginnt. Wir haben also zwei wachsende Reihen, die wir zur grösseren Bequemlichkeit so schreiben:

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots, q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots,$$

und für welche wir folgende Bestimmungen haben:

Wenn $a > 1$,

$$p_0 = 1, \; p_1 < a \text{ und } > a - 1, \; q_0 = 0, \; q_1 = 1;$$

wenn $a < 1$,

$$p_0 = 0, \; p_1 = 1, \; q_0 = 1, \; q_1 < \frac{1}{a} \text{ und } > \frac{1}{a} - 1;$$

ferner

$$\begin{aligned} p_2 &= \mu_1 p_1 + p_0, & q_2 &= \mu_1 q_1 + q_0, \\ p_3 &= \mu_2 p_2 + p_1, & q_3 &= \mu_2 q_2 + q_1, \\ p_4 &= \mu_3 p_3 + p_2, & q_4 &= \mu_3 q_3 + q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und zur Bestimmung von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ die Bedingungen:

$$\mu_1 < \frac{p_0 - aq_0}{aq_1 - p_1} > \frac{p_0 - aq_0}{aq_1 - p_1} - 1,$$

$$\mu_2 < \frac{p_1 - aq_1}{aq_2 - p_2} > \frac{p_1 - aq_1}{aq_2 - p_2} - 1,$$

$$\mu_3 < \frac{p_2 - aq_2}{aq_3 - p_3} > \frac{p_2 - aq_2}{aq_3 - p_3} - 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man versäume nicht zu beachten, dass der zweite Fall in dem ersten enthalten ist, denn setzt man in den Formeln für den ersten Fall $a < 1$, so kommt nothwendig

$$p < a \text{ und } > a - 1 = 0;$$

folglich

$$p_0 = 1, \; p_1 = 0, \; q_0 = 0, \; q_1 = 1,$$

und mithin

$$\mu_1 < \frac{1}{a} \text{ und } > \frac{1}{a} - 1, \; p_2 = 1, \; q_2 = \mu_1;$$

so dass hier p_1, p_2 und q_1, q_2 das werden, was im zweiten Falle p_0, p_1, q_0, q_1 geworden wären; und es werden daher die folgenden Glieder in beiden Fällen dieselben sein.

Man kann also im Allgemeinen, was auch a sei, folgende Bestimmungen treffen:

$$\begin{array}{ll}
p_0 = 1, & q_0 = 0, \\
p_1 = \mu, & q_1 = 1, \\
p_2 = \mu_1 p_1 + 1, & q_2 = \mu_1, \\
p_3 = \mu_2 p_2 + p_1, & q_3 = \mu_2 q_2 + q_1, \\
p_4 = \mu_3 p_3 + p_2, & q_4 = \mu_3 q_3 + q_2, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Ferner

$$\begin{aligned}
\mu &< a, \\
\mu_1 &< \frac{p_0 - a q_0}{a q_1 - p_1} < \frac{1}{a - \mu}, \\
\mu_2 &< \frac{a q_1 - p_1}{p_2 - a q_2}, \\
\mu_3 &< \frac{p_2 - a q_2}{a q_3 - p_3}, \\
\mu_4 &< \frac{a q_3 - p_3}{p_4 - a q_4}, \\
&\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

wo das Zeichen $<$ diejenige ganze Zahl andeutet, die unmittelbar dem verzeichneten Ausdruck vorangeht.

Man findet so folgweise alle Werthe von p und q, die der Aufgabe genügen könnten, denn es können das nur die in den beiden Reihen $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ und $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ einander entsprechenden Glieder sein.

Zusatz I.

26. Macht man

$$b = \frac{p_0 - aq_0}{aq_1 - p_1}, \quad c = \frac{aq_1 - p_1}{p_2 - aq_2}, \quad d = \frac{p_2 - aq_2}{aq_3 - p_3}, \ldots,$$

so kommt, wie leicht zu sehen ist,

$$b = \frac{1}{a - \mu}, \quad c = \frac{1}{b - \mu_1}, \quad d = \frac{1}{c - \mu_3}, \ldots,$$

und $\mu < a$, $\mu_1 < b$, $\mu_2 < c$, $\mu_3 < d$ u. s. f.; es sind also die Zahlen μ, μ_1, μ_2, ... nichts anderes, als was wir in No. 3 mit α, β, γ, ... bezeichnet haben, d. h. diese Zahlen sind die Glieder des den Werth von a darstellenden Kettenbruches, so dass man jetzt haben wird

$$a = \mu + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots}}$$

Also die Zahlen p_1, p_2, p_3, ... werden die Zähler, und q_1, q_2, q_3, ..., die Nenner der gegen a convergirenden Kettenbrüche sein, Brüche, die wir in No. 10 mit $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \ldots$ bezeichnet haben.

Es kommt somit Alles darauf an, den Werth von a durch einen Kettenbruch darzustellen, dessen Glieder sämmtlich positiv sind, was mittelst der oben mitgetheilten Methoden ausgeführt werden kann; nur nehme man immer Näherungswerthe, die kleiner als der vorgelegte sind; alsdann hat man nur noch die gegen a convergirende Reihe von Hauptbrüchen zu bilden, deren Glieder die Werthe von p und q geben, und diese lösen das vorgelegte Problem, so dass jedes $\frac{p}{q}$ einer dieser Brüche sein muss.

Zusatz II.

27. Aus dem Vorigen folgt eine neue Eigenschaft der in Rede stehenden Brüche; wenn nämlich $\frac{p}{q}$ einer der gegen a convergirenden Hauptbrüche ist (vorausgesetzt die Entwickelung eines Kettenbruches mit nur positiven Gliedern), so wird die Grösse $p - aq$ immer, abgesehen vom Zeichen, einen kleineren Werth haben, als wenn man für p und q andere, kleinere Ziffern setzte.

II. Aufgabe.

28. *Es sei die Grösse*

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \ldots + Vq^m,$$

gegeben, in welcher A, B, C, ... gegebene ganze, positive oder negative Zahlen und p und q unbestimmte, ganze, positive Zahlen bedeuten; man verlangt die Werthe von p und q, die den gegebenen Ausdruck zu einem Minimum machen.

Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die reellen Wurzeln, und $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\omega \pm \varrho\sqrt{-1}$ die imaginären Wurzeln der Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + V = 0;$$

so hat man, nach der Theorie der Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \ldots + Vq^m \\ = A(p - \alpha q)(p - \beta q)(p - \gamma q) \ldots [p - (\mu + \nu\sqrt{-1})q] \\ \times [p - (\mu - \nu\sqrt{-1})q][p - (\omega + \varrho\sqrt{-1})q] \\ [p - (\omega - \varrho\sqrt{-1})q] \ldots \\ = A(p - \alpha q)(p - \beta q)(p - \gamma q) \ldots [(p - \mu q)^2 + \nu^2 q^2] \\ [(p - \omega q)^2 + \varrho^2 q^2] \ldots \end{aligned}$$

Die Aufgabe kommt also darauf hinaus, dass das Product der Grössen $p - \alpha q, p - \beta q, p - \gamma q, \ldots$ und $(p - \mu q)^2 + \nu^2 q^2$, $(p - \omega q)^2 + \varrho^2 q^2, \ldots$ möglichst klein sei, während p und q ganze positive Zahlen sind.

Gesetzt man habe Werthe von p und q gefunden, die dem Minimum entsprechen; wenn man nun anstatt derselben kleinere

Zahlen setzt, so muss das fragliche Product einen grösseren Werth annehmen. Alsdann wird nothwendig einer der Factoren einen grösseren Werth erhalten. Wenn z. B. a einen negativen Werth hat, so würde $p - aq$ stets zugleich mit p und q abnehmen; dasselbe geschähe mit dem Factor $(p - \mu q)^2 + \nu^2 q^2$, wenn μ negativ wäre, und ebenso mit den übrigen; hieraus folgt, dass es unter den reellen Factoren nur diejenigen mit positiver Wurzel sind, die an Werth zunehmen können; und unter den doppelten, imaginären nur diejenigen, wo der reelle Theil der imaginären Wurzel positiv ist; ferner bemerke man, dass, damit $(p - \mu q)^2 + \nu^2 q^2$ zunehme, während p und q abnehmen, der Theil $(p - \mu q)^2$ nothwendig wachsen muss, denn der andere Theil $\nu^2 q^2$ nimmt sicher ab, so dass die Vergrösserung dieses Ausdruckes vom Werthe von $p - \mu q$ abhängen wird, und ähnlich bei den übrigen.

Die Werthe von p und q also, die dem Minimum entsprechen, müssen solche sein, dass $p - aq$ zunimmt, sobald p und q kleinere Werthe annehmen, und wenn man für a eine der reellen positiven Wurzeln der Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + V = 0$$

nimmt oder einen der reellen positiven Theile der imaginären Wurzeln, falls es deren giebt.

Es seien r und s zwei ganze positive Zahlen kleiner als p und q; es muss also, abgesehen vom Zeichen, $r - as > p - aq$ sein. Angenommen, wie in No. 23, diese Zahlen genügten der Bedingung $ps - qr = \pm 1$, wobei das obere Zeichen gilt, wenn $p - aq$ positiv, und das untere, wenn $p - aq$ negativ ist, so dass die beiden Grössen $p - aq$ und $r - as$ verschiedene Zeichen haben; alsdann ist der Fall genau derjenige, auf welchen wir die vorige Aufgabe No. 24 zurückgeführt und deren Lösung wir bereits gegeben haben.

Also (No. 26) die Werthe von p und q müssen nothwendig unter den Gliedern der gegen a, d. h. gegen eine der Grössen, von denen wir aussagten, dass sie für a genommen werden konnten, convergirenden Hauptbrüche vorkommen. Man muss mithin alle diese Grössen in Kettenbrüche verwandeln (was leicht mit Benutzung unserer Methoden geschehen kann), und dann die convergirenden Brüche herleiten, um welche es sich handelt; danach setzt man p folgweise gleich allen Zählern dieser Brüche, und q gleich den entsprechenden Nennern,

und diejenige Substitution, die den kleinsten Werth für die vorgelegte Function ergiebt, wird auch sicher dem gesuchten Minimum entsprechen.

I. Bemerkung.

29. Wir haben angenommen, p und q seien beide positiv; nimmt man beide negativ, so wird sich offenbar kein Unterschied gegen vorhin in dem absoluten Werth der vorliegenden Formel ergeben; nur das Zeichen würde wechseln, wenn der Exponent m ungerade, und es würde genau das Frühere sich ergeben, wenn der Exponent m gerade wäre; mithin ist es gleichgültig, welches Zeichen man p und q giebt, sobald beide gleiches Zeichen haben.

Anders wenn p und q ungleiche Zeichen haben; denn alsdann werden die abwechselnden Glieder der vorgelegten Gleichung ihre Zeichen wechseln, und zugleich hiermit wechselt auch das der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu \pm \nu\sqrt{-1}, \omega \pm \varrho\sqrt{-1}, \ldots$, so dass die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \omega, \ldots$ die negativ, und mithin im ersten Falle nutzlos waren, jetzt positiv werden und an Stelle jener angewandt werden müssen.

Hieraus schliesse ich im Allgemeinen, dass, wenn man das Minimum unter der einzigen Bedingung sucht, dass p und q ganze Zahlen seien, man folgweise für a alle reellen Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, und alle reellen Theile $\mu, \omega, \ldots$ der imaginären Wurzeln der Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + V = 0,$$

abgesehen vom Zeichen dieser Grössen, nehmen müsste, dann aber muss man p und q gleiche oder ungleiche Zeichen geben, je nachdem die für a genommene Grösse ursprünglich positiv oder negativ war.

II. Bemerkung.

30. Wenn es unter den reellen Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ commensurable giebt, so wird die vorgelegte Grösse offenbar gleich 0, sobald man $\frac{p}{q}$ gleich einer dieser Wurzeln setzt; in diesem Falle giebt es eigentlich kein Minimum; in allen

anderen Fällen kann die fragliche Grösse unmöglich gleich 0 werden, so lange p und q ganze Zahlen sind; da nun die Coëfficienten $A, B, C, \ldots$ auch ganze Zahlen nach der Voraussetzung sind, so wird diese Grösse stets eine ganze Zahl und mithin niemals kleiner als 1 sein.

Soll also die Gleichung

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \ldots + Vq^m = \pm 1,$$

in ganzen Zahlen aufgelöst werden, so muss man nach der vorstehenden Methode die Werthe von p und q aufsuchen, ausgenommen den Fall, bei welchem die Gleichung

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + V = 0$$

irgend welche commensurable Wurzeln oder Divisoren hätte; denn alsdann könnte die Grösse

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \ldots$$

in zwei oder mehrere Ausdrücke von niedrigerem Grade zerlegt werden; ein jeder der Theilausdrücke für sich müsste gleich der Einheit sein, und man hätte mindestens zwei Gleichungen zur Bestimmung von p und q.

Wir haben schon anderswo (Memoiren der Berliner Akademie von 1768*) eine Lösung dieses letzteren Problems gegeben; aber die soeben mitgetheilte ist viel einfacher und directer, obwohl beide auf derselben Theorie der Kettenbrüche beruhen.

III. Aufgabe.

31. *Man verlangt die Werthe von p und q, die den Ausdruck*

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2$$

zu einem Minimum machen, während p und q ganze Zahlen sind.

Diese Aufgabe ist offenbar ein Specialfall der vorigen; aber wir glaubten sie besonders hervorheben zu müssen, weil sie eine sehr einfache und sehr elegante Lösung zulässt, und weil wir sie später, bei der Auflösung der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen, anwenden wollen.

---

*) Œuvres de *Lagrange*, t. II, p. 538 und 581.

Nach der allgemeinen Methode muss man zuerst die Wurzeln der Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

aufsuchen, die bekanntlich gleich

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

sind. Nun gilt Folgendes:

1. Wenn $B^2 - 4AC$ eine Quadratzahl ist, so sind die beiden Wurzeln commensurabel, und es giebt kein eigentliches Minimum, da $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ gleich Null werden kann.

2. Wenn $B^2 - 4AC$ keine Quadratzahl ist, so sind die beiden Wurzeln irrational oder imaginär, je nachdem $B^2 - 4AC$ grösser oder kleiner als 0 ist, welche beide Fälle gesondert zu betrachten sind; wir beginnen mit dem letzteren, dem leichter lösbaren.

Erster Fall, wenn $B^2 - 4AC < 0$.

32. Da die beiden Wurzeln jetzt imaginär sind, so erhält man $\frac{-B}{2A}$ für den reellen Theil dieser Wurzeln, und dieses muss mithin für a genommen werden. Man hat also nur den Bruch $\frac{-B}{2A}$, abgesehen vom Zeichen, nach der Methode in No. 4, in einen Kettenbruch zu verwandeln, und daraus die Reihe der convergirenden Brüche herzuleiten, (No. 10), und diese wird nothwendig endlich sein; darnach wird man folgweise für p die Zähler dieser Brüche ansetzen und für q die entsprechenden Nenner, indem man beiden gleiche oder entgegengesetzte Zeichen ertheilt, je nachdem $\frac{-B}{2A}$ positiv oder negativ ist. Man findet so diejenigen Werthe von p und q, die den gegebenen Ausdruck zu einem Minimum machen.

Beispiel.

Es sei gegeben der Ausdruck

$$49p^2 - 238pq + 290q^2.$$

Man hat also $A = 49$, $B = -238$, $C = 290$; folglich

$$B^2 - 4AC = -196,\ \frac{-B}{2A} = \frac{238}{98} = \frac{17}{7}.$$

Mit diesem Bruch nach Art der No. 4 verfahrend, findet man die Quotienten 2, 2, 3, und mittelst dieser erhält man die Brüche (No. 20):

$$\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 3, \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}. \end{array}$$

Die zu versuchenden Zahlen sind also 1, 2, 5, 17 für p, und 0, 1, 2, 7 für q; sei nun P die vorgelegte Grösse, so kommt

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49

woraus erhellt, dass der kleinste Werth des vorgelegten Ausdruckes gleich 5 ist, wie man aus $p = 5$, $q = 2$ erhält; im Allgemeinen kann man schliessen, dass der fragliche Ausdruck nicht kleiner als 5 werden kann, so lange p und q ganze Zahlen sein sollen; das Minimum findet also statt bei $p = 5$ und $q = 2$.

Zweiter Fall, wenn $B^2 - 4AC > 0$.

33. Da im vorliegenden Falle die Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

zwei irrationale Wurzeln hat, muss man beide in Kettenbrüche entwickeln. Solches kann sehr leicht ausgeführt werden auf Grund einer Methode, die wir anderswo gebracht haben und hier wiederholen zu müssen glauben, da sie direct aus den Formeln der No. 25 hervorgeht und zudem noch Alles enthält, was zur Lösung des vorliegenden Problems führt.

Es sei a die in einen Kettenbruch zu entwickelnde Wurzel,

die wir stets als positiv annehmen wollen, und zugleich heisse die andere Wurzel b; alsdann ist, wie bekannt,

$$a + b = -\frac{B}{A}, \quad ab = \frac{C}{A};$$

daher

$$a - b = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{A},$$

oder, wenn man zur Abkürzung $B^2 - 4AC = E$ setzt,

$$a - b = \frac{\sqrt{E}}{A},$$

wo $\sqrt{E}$ positiv oder negativ sein kann; positiv, wenn a die grössere der beiden Wurzeln, und negativ, wenn es die kleinere ist; also ist

$$a = \frac{-B + \sqrt{E}}{2A}, \quad b = \frac{-B - \sqrt{E}}{2A}.$$

Behält man nun die Bezeichnungen von No. 25 bei, so braucht man nur für a den vorstehenden Werth einzusetzen und es bleibt dann nur noch die Schwierigkeit, die ganzen Näherungswerthe von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ in einfacher Weise zu bestimmen.

Um diese Bestimmung zu erleichtern, multiplicire ich die Brüche $\frac{p_0 - aq_0}{aq_1 - p_1}, \frac{aq_1 - p_1}{p_2 - aq_2}, \frac{p_2 - aq_2}{aq_3 - p_3}, \ldots$ mit $A(bq_1 - p_1)$, $A(p_2 - bq_2)$, $A(bq_3 - p_3)$, ... und da

$$A(p_0 - aq_0)(p_0 - bq_0) = A,$$

$$A(qa_1 - p_1)(bq_1 - p_1) = Ap_1^2 - A(a + b)p_1 q_1 + Aabq_1^2$$
$$= Ap_1^2 + Bp_1 q_1 + Cq_1^2,$$

$$A(p_2 - aq_2)(p_2 - bq_2) = Ap_2^2 - A(a + b)p_2 q_2 + Aabq_2^2$$
$$= Ap_2^2 + Bp_2 q_2 + Cq_2^2,$$

. . . . ,

$$A(p_0 - aq_0)(bq_1 - p_1) = -\mu A - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\sqrt{E},$$
$$A(aq_1 - p_1)(p_2 - bq_2) = -Ap_1p_2 + Aap_2q_1 + Abp_1q_2 - Aabq_1q_2$$
$$= -Ap_1p_2 - Cq_1q_2 - \tfrac{1}{2}B(p_1q_2 + q_1p_2)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p_2q_1 - q_2p_1),$$
$$A(p_2 - aq_2)(bq_3 - p_3) = -Ap_2p_3 + Aap_3q_2 + Abp_2q_3 - Aabq_2q_3$$
$$= -Ap_2p_3 - Cq_2q_3 - \tfrac{1}{2}B(p_2q_3 + q_2p_3)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p_3q_2 - q_3p_2),$$
$$\dots\dots\dots,$$

u. s. f., so schreibe ich zur Abkürzung:

$$P_0 = A,$$
$$P_1 = Ap_1^2 + Bp_1q_1 + Cq_1^2,$$
$$P_2 = Ap_2^2 + Bp_2q_2 + Cq_2^2,$$
$$P_3 = Ap_3^2 + Bp_3q_3 + Cq_3^2,$$
$$\dots\dots\dots;$$

$$Q_0 = \tfrac{1}{2}B,$$
$$Q_1 = A\mu + \tfrac{1}{2}B,$$
$$Q_2 = Ap_1p_2 + \tfrac{1}{2}B(p_1q_2 + q_1p_2) + Cq_1q_2,$$
$$Q_3 = Ap_2p_3 + \tfrac{1}{2}B(p_2q_3 + q_2p_3) + Cq_2q_3,$$
$$\dots\dots\dots$$

Ich erhalte nun, weil $p_2q_1 - q_1p_2 = 1$, $p_3q_2 - q_3p_2 = 1$, $p_4q_3 - q_3p_4 = 1, \dots$, die folgenden Formeln:

$$\mu < \frac{-Q_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{E}}{P_0},$$
$$\mu_1 < \frac{-Q_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{E}}{P_1},$$
$$\mu_2 < \frac{-Q_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{E}}{P_2},$$
$$\mu_3 < \frac{-Q_3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{E}}{P_3},$$
$$\dots\dots\dots,$$

Wenn man nun in dem Ausdruck für Q_2 statt p_2 und q_2 ihre Werthe $\mu_1 p_1 + 1$ und μ_1 einsetzt, so geht er über in $\mu_1 P_1 + Q_1$; ebenso, wenn man in Q_3 für p_3 und q_3 ihre Werthe $\mu_2 p_2 + p_1$ und $\mu_2 q_2 + q_1$ setzt, so geht er über in $\mu_2 P_2 + Q_2$, u. s. f.; so erhält man:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mu\ \ P_0 + Q_0\,, \\ Q_2 &= \mu_1 P_1 + Q_1\,, \\ Q_3 &= \mu_2 P_2 + Q_2\,, \\ Q_4 &= \mu_3 P_3 + Q_3\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

Wenn man ferner, in ähnlicher Weise, in dem Ausdrucke für P_2 die Werthe von p_2 und q_2 einsetzt, so geht er über in

$$\mu_1^2 P_1 + 2\mu_1 Q_1 + A;$$

und wenn die Werthe für p_3 und q_3 in P_3 eingesetzt werden, so geht er über in

$$\mu_2^2 P_2 + 2\mu_2 Q_2 + P_1\,,$$

u. s. f., so dass man schliesslich erhält:

$$\begin{aligned} P_1 &= \mu^2 P_0 + 2\mu\ \ Q_0 + C,\,, \\ P_2 &= \mu_1^2 P_1 + 2\mu_1 Q_1 + P_0\,, \\ P_3 &= \mu_2^2 P_2 + 2\mu_2 Q_2 + P_1\,, \\ P_4 &= \mu_3^2 P_3 + 2\mu_3 Q_3 + P_2\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man also beliebig weit die Reihe der Zahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ und $P_0, P_1, P_2, \ldots$ fortsetzen; dieselben hängen offenbar gegenseitig von einander ab, und es ist nicht nöthig, die Zahlen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ und $q_0, q_1, q_2, \ldots$ zu berechnen.

Man kann auch die Werthe von $P_1, P_2, P_3, \ldots$ mittelst noch einfacherer Formeln erhalten, wenn man beachtet, dass

$$Q_1^2 - AP_1 = (\mu_1 A + \tfrac{1}{2}B)^2 - A(\mu_1^2 A + \mu_1 B + C) = \tfrac{1}{4}B^2 - AC,$$
$$Q_2^2 - P_1 P_2 = (\mu_1 P_1 - Q_1)^2 - P_1(\mu_1^2 P_1 + 2\mu_1 Q_1 + A) = Q_1^2 - AP_1,$$

u. s. f., d. h.:

$$Q_1^2 - P_0 P_1 = \tfrac{1}{4} E,$$
$$Q_2^2 - P_1 P_2 = \tfrac{1}{4} E,$$
$$Q_3^2 - P_2 P_3 = \tfrac{1}{4} E,$$
$$\dots\dots\dots\dots;$$

woraus:

$$P_1 = \frac{Q_1^2 - \frac{1}{4}E}{P_0},$$
$$P_2 = \frac{Q_2^2 - \frac{1}{4}E}{P_1},$$
$$P_3 = \frac{Q_3^2 - \frac{1}{4}E}{P_2},$$
$$\dots\dots\dots$$

Die Zahlen μ, μ_1, μ_2, ... sind somit gefunden und man erhält (No. 26) den Kettenbruch

$$a = \mu + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \ddots}}$$

und für das Minimum des Ausdrucks

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2,$$

braucht man nur noch die Zahlen p_0, p_1, p_2, p_3, ... und q_0, q_1, q_2, q_3, ... (No. 25) zu berechnen und sie anstatt p und q zu versuchen; aber auch dieser Rechnung kann man sich entschlagen, wenn man beachtet, dass die Grössen P_0, P_1, P_2, ... eben die Werthe unseres Ausdruckes sind, wenn man in denselben folgweise $p = p_0$, p_1, p_2, ... und $q = q_0$, q_1, q_2, ... einsetzt. Also braucht man nur nachzusehen, welcher Werth der Reihe P_0, P_1, P_2, ... der kleinste sei, denn die P sind gleichzeitig mit den Werthen μ berechnet und man hat bereits das gesuchte Minimum; alsdann findet man mit Hülfe der gegebenen Formeln die entsprechenden Werthe von p und q.

34. Ich behaupte nun, dass man bei Fortsetzung der Reihe P_0, P_1, P_2, ..., nothwendig auf zwei sich folgende Glieder mit entgegengesetzten Zeichen stossen müsse, und dass von hier ab alle folgenden Glieder gleichfalls abwechselnde Zeichen haben werden. Denn es ist (No. 33)

$$P_0 = A(p_0 - aq_0)(p_0 - bq_0), \quad P_1 = A(p_1 - aq_1)(p_1 - bq), \ldots$$

Aber nach den im I. Problem gegebenen Erläuterungen ist ersichtlich, dass die Grössen $p_0 - aq_0$, $p_1 - aq_1$, $p_2 - aq_2$, ... abwechselnde Zeichen haben müssen und dass sie eine stets abnehmende Reihe bilden werden; daraus folgt: 1) dass, wenn b negativ ist, die Grössen $p_0 - bq_0$, $p_1 - bq_1$, ... sämmtlich positiv sein werden; folglich werden die Zeichen der Reihe P_0, P_1, P_2, ... wechseln; 2) dass, wenn b positiv ist und weil die Grössen $p_1 - aq_1$, $p_2 - aq_2$, ..., und vollends $\frac{p_1}{q_1} - a$, $\frac{p_2}{q_2} - a$, ... eine bis ins Unendliche abnehmende Reihe bilden, — man nothwendig zu einer dieser letzteren Grössen gelangen müsse, etwa $\frac{p_3}{q_3} - a$, die, abgesehen vom Zeichen, $< a - b$ ist, und ebenso alle folgenden $\frac{p_4}{q_4} - a$, $\frac{p_5}{q_5} - a$, ..., so dass alle Werthe $a - b + \frac{p_3}{q_3} - a$, $a - b + \frac{p_4}{q_4} - a$, ... nothwendig dasselbe Zeichen haben werden, wie $a - b$; folglich werden die Grössen $\frac{p_3}{q_3} - b$, $\frac{p_4}{q_4} - b$, ... und $p_3 - bq_3$, $p_4 - bq_4$ ... alle bis ins Unendliche gleiches Zeichen haben; mithin wechseln die P_3, P_4, P_5, ... ihre Zeichen.

Nehmen wir nun im Allgemeinen an, wir seien in der Reihe der P_1, P_2, P_3, ... zu abwechselnden Zeichen gelangt und P_λ sei das erste dieser Glieder, so dass alle ferneren P_λ, $P_{\lambda+1}$, $P_{\lambda+2}$, ... bis ins Unendliche abwechselnd positiv und negativ sind; ich behaupte nun, dass kein einziges dieser Glieder $> E$ sein könne. Denn, wenn z. B. P_3, P_4, P_5 abwechselnde Zeichen haben, so wird das Product je zweier auf einander folgender $P_3 P_4$, $P_4 P_5$, ... stets negativ sein; aber nach No. 33 ist

$$Q_4^2 - P_3 P_4 = \tfrac{1}{4}E, \quad Q_5^2 - P_4 P_5 = \tfrac{1}{4}E, \ldots;$$

also sind die positiven Zahlen $-P_3P_4$, $-P_4P_5$, ... alle kleiner als $\frac{1}{4}E$ oder wenigstens nicht grösser als $\frac{1}{4}E$; da nun die Zahlen P_1, P_2, P_3, ... ihrer Bestimmung gemäss ganze Zahlen sind, so können die Zahlen P_3, P_4, ... und allgemein P_λ, $P_{\lambda+1}$, ... abgesehen vom Zeichen, niemals die Zahl $\frac{1}{4}E$ übertreffen.

Hieraus folgt auch, dass die Glieder Q_4, Q_5 ..., und allgemein $Q_{\lambda+1}$, $Q_{\lambda+2}$, ... niemals $\frac{1}{2}\sqrt{E}$ übertreffen können.

Der Schluss liegt nun nahe, dass die beiden Reihen P_λ, $P_{\lambda+1}$, $P_{\lambda+2}$, ... und Q_λ, $Q_{\lambda+1}$, $Q_{\lambda+2}$, ..., obwohl bis ins Unendliche sich fortsetzend, doch nur aus einer gewissen Anzahl von einander verschiedener Glieder bestehen können, denn es können nur die natürlichen Zahlen bis $\frac{1}{4}E$ positiv oder negativ auftreten, und ferner die Reihe der natürlichen Zahlen bis $\frac{1}{2}\sqrt{E}$ mit den Zwischenbrüchen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ..., positiv oder negativ; denn aus den Formeln der vorigen Nummer folgt, dass die Zahlen Q_1, Q_2, Q_3, ... immer ganze Zahlen sein werden, wenn B gerade ist, und den Bruch $\frac{1}{2}$ enthalten werden, wenn B ungerade ist.

Im Verlauf der beiden Reihen P_1, P_2, P_3, ... und Q_1, Q_2, Q_3, ... muss es also eintreten, dass zwei entsprechende Glieder, wie P_ω und Q_ω nach einer gewissen Anzahl von Gliedern, die wir als gerade annehmen können, wiederkehren; denn da auch feststeht, dass dieselben Glieder P_ω und Q_ω unendlich oft wiederkehren, weil die Anzahl verschiedener Glieder in beiden Reihen eine endliche ist und ebenso die Anzahl ihrer Combinationen, so ist es klar, dass, wenn diese beiden Glieder nach einer ungeraden Anzahl von Gliedern wiederkehren würden, man ihre Wiederkehr nur ein ums andere Mal zu betrachten brauchte, wodurch die Zwischenzahl eine gerade würde.

Es sei nun 2ϱ die Anzahl der Zwischenglieder, so hat man

$$P_{\omega+2\varrho} = P_\omega, \text{ und } Q_{\omega+2\varrho} = Q_\omega,$$

und es werden jetzt alle Glieder P_ω, $P_{\omega+1}$, $P_{\omega+2}$, ..., Q_ω, $Q_{\omega+1}$, $Q_{\omega+2}$, ... sowie μ_ω, $\mu_{\omega+1}$, $\mu_{\omega+2}$, ... nach einem jeden Intervall 2ϱ wiederkehren; denn es folgt aus den in der vorigen Nummer zur Bestimmung von μ_1, μ_2, μ_3, ..., Q_1, Q_2, Q_3, ... P_1, P_2, P_3, ... gegebenen Formeln, dass, sobald

$$P_{\omega+2\varrho} = P_\omega \text{ und } Q_{\omega+2\varrho} = Q_\omega,$$

auch

$$\mu_{\omega+2\varrho} = \mu_\omega,$$

ferner

$$Q_{\omega+2\varrho+1} = Q_{\omega+1} \text{ und } P_{\omega+2\varrho+1} = P_{\omega+1};$$

also auch

$$\mu_{\omega+2\varrho+1} = \mu_{\omega+1},$$

und so fort.

Wenn also Π irgend eine Zahl bedeutet, gleich oder $> \omega$ und m irgend eine ganze positive Zahl, so hat man allgemein:

$$P_{\Pi+2m\varrho} = P_\Pi, \; Q_{\Pi+2m\varrho} = Q_\Pi, \; \mu_{\Pi+2m\varrho} = \mu_\Pi;$$

so dass, wenn man die $\omega + 2\varrho$ ersten Glieder einer jeden dieser drei Reihen kennt, man auch im Besitz aller folgenden ist, denn diese sind nichts anderes, als die 2ϱ letzten Glieder, die in derselben Ordnung bis ins Unendliche wiederkehren.

Aus alledem folgt, dass, um das Minimum von

$$P = Ap^2 + Bpq + Cq^2$$

zu finden, man die Reihen $P_0, P_1, P_2, \ldots, Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ fortsetzen muss, bis zwei correspondirende Werthe, wie P_ω und Q_ω, wieder auftreten, nach einer geraden Anzahl von Zwischengliedern, so dass man hat

$$P_{\omega+2\varrho} = P_\omega \text{ und } Q_{\omega+2\varrho} = Q_\omega;$$

alsdann wird das kleinste der Glieder $P_0, P_1, P_2, \ldots P_{\omega+2\varrho}$ das gesuchte Minimum sein.

Zusatz I.

35. Wenn das kleinste Glied der Reihe $P_0, P_1, P_2, \ldots P_{\omega+2\varrho} \ldots$ nicht vor dem Gliede P_ω vorkommt, so wird dieses Glied unendlich oft in der ins Unendliche fortgesetzten Reihe wiederkehren; also wird es unendlich viel Werthe von p und q geben, die dem Minimum entsprechen, und diese alle kann man mittelst der Formeln in No. 25 finden, indem man die Reihe der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ bis über das Glied $\mu_{2\varrho+\omega}$ fortsetzt durch Wiederholung derselben Werthe $\mu_{\omega+1}, \mu_{\omega+2}$, wie oben erläutert ward.

Man kann auch in diesem Falle allgemeine Formeln aufstellen, die alle Werthe von p und q darstellen; aber die Einzelheiten der hierzu erforderlichen Methode würden uns zu weit führen; für jetzt begnügen wir uns mit der Verweisung auf den schon angeführten Aufsatz in den Berliner Abhandlungen vom Jahre 1768, Seite 123 und folgende *), wo man eine neue und allgemeine Theorie der Kettenbrüche finden wird.

Zusatz II.

36. Wir haben in No. 34 bewiesen, dass man nothwendig bei Fortsetzung der Reihe P_1, P_2, P_3, ... auf Glieder stossen müsse, die einander mit entgegengesetzen Zeichen folgen. Es seien z. B. P_3 und P_4 die beiden ersten Glieder dieser Art, so werden die beiden Grössen $p_3 - bq_3$ und $p_4 - bq_4$ nothwendig gleiches Zeichen haben, weil die Grössen $p_3 - aq_3$ und $p_4 - aq_4$ verschiedene Zeichen haben. Setzt man nun in den Grössen $p_5 - bq_5$, $p_6 - bq_6$ ... die Werthe von $p_5, p_6, \ldots$, $q_5, q_6, \ldots$ (No. 25), so kommt

$$p_5 - bq_5 = \mu_4(p_4 - bq_4) + p_3 - bq_3,$$
$$p_6 - bq_6 = \mu_5(p_5 - bq_5) + p_4 - bq_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

woraus, da $\mu_4, \mu_5, \ldots$ positiv sind, folgt, dass alle $p_5 - bq_5$, $p_6 - bq_6$, ... bis ins Unendliche dasselbe Zeichen haben werden, wie $p_3 - bq_3$, $p_4 - bq_4$; mithin werden alle Glieder P_3, P_4, P_5, ... bis ins Unendliche abwechselnde Zeichen haben.

Jetzt hat man auf Grund der vorstehenden Gleichungen:

$$\mu_4 = \frac{p_5 - bq_5}{p_4 - bq_4} - \frac{p_3 - bq_3}{p_4 - bq_4},$$

$$\mu_5 = \frac{p_6 - bq_6}{p_5 - bq_5} - \frac{p_4 - bq_4}{p_5 - bq_5},$$

$$\mu_6 = \frac{p_7 - bq_7}{p_6 - bq_6} - \frac{p_5 - bq_5}{p_6 - bq_6},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*) Œuvres de Lagrange, t. II, p. 538 und 581.

wo die Grössen $\frac{p_3 - bq_3}{p_4 - bq_4}$, $\frac{p_4 - bq_4}{p_5 - bq_5}$, ... sämmtlich positiv sind.

Da nun die Zahlen μ_4, μ_5, μ_6, ... ganz und positiv sind (Voraussetzung), so wird $\frac{p_5 - bq_5}{p_4 - bq_4}$ positiv und > 1 sein, und ebenso die Grössen $\frac{p_6 - bq_6}{p_5 - bq_5}$, $\frac{p_7 - bq_7}{p_6 - bq_6}$, ...; folglich sind $\frac{p_4 - bq_4}{p_5 - bq_5}$, $\frac{p_5 - bq_5}{p_6 - bq_6}$, ... positiv und < 1; also können die μ_5, μ_6, ... nur ganze Zahlen sein, die unmittelbar kleiner sind als $\frac{p_6 - bq_6}{p_5 - bq_5}$, $\frac{p_7 - bq_7}{p_6 - bq_6}$, ...; die Zahl μ_4 wird auch gleich derjenigen ganzen Zahl sein, die unmittelbar dem Werthe $\frac{p_5 - bq_5}{p_4 - bq_4}$ vorangeht, sobald man $\frac{p_3 - bq_3}{p_4 - bq_4} < 1$ hat.

Also erhält man:

$$\mu_4 < \frac{p_5 - bq_5}{p_4 - bq_4}, \quad \text{wenn } \frac{p_3 - bq_3}{p_4 - bq_4} < 1,$$

$$\mu_5 < \frac{p_6 - bq_6}{p_5 - bq_5}$$

$$\mu_6 < \frac{p_7 - bq_7}{p_6 - bq_6}$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

wo das Zeichen $<$ nach den Zahlen μ_4, μ_5, μ_6, ... bedeutet, dass die unmittelbar vorangehenden ganzen Zahlen zu verstehen sind.

Mittelst Transformationen, ähnlich denen in No. 33, kann man die Grössen $\frac{p_5 - bq_5}{p_4 - bq_4}$, $\frac{p_6 - bq_6}{p_5 - bq_5}$, ... in $\frac{Q_5 + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_4}$, $\frac{Q_6 - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_5}$, ... verwandeln; ferner kann die Bedingung $\frac{p_3 - bq_3}{p_4 - bq_4} < 1$ auf folgende gebracht werden $\frac{-P_3}{P_4} < \frac{aq_3 - p_3}{p_4 - aq_4}$,

die, weil $\frac{aq_3 - p_3}{p_4 - aq_4} > 1$, durchaus statthaben wird, sobald $\frac{-P_3}{P_4} =$ oder < 1 ist; man erhält also:

$$\mu_4 < \frac{Q_5 + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_4}, \text{ wenn } \frac{-P_3}{P_4} = \text{ oder } < 1,$$

$$\mu_5 < \frac{Q_6 - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_5}$$

$$\mu_6 < \frac{Q_7 + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_6}$$

. . . .

Combinirt man diese Formeln mit denen in No. 33, die das Gesetz der Reihen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ und $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ einschliessen, so bemerkt man leicht, dass, wenn man zwei entsprechende Glieder dieser beiden Reihen als gegeben annimmt, und zwar Glieder, deren Rang höher als 3 ist, man bei den vorstehenden Reihen bis P_4 und Q_5 und selbst bis P_3 und Q_5 zurückgehen kann, wenn die Bedingung $\frac{-P_3}{P_4} =$ oder < 1 statt hat; so dass alle diese Glieder durch die als gegeben vorausgesetzten vollkommen bestimmt sein werden.

In der That es sei z. B. P_6 und Q_6 bekannt, so erhält man zunächst P_5 durch die Gleichung

$$Q_6^2 - P_5 P_6 = \frac{1}{4}E;$$

dann findet man, da man Q_6 und P_5 hat, μ_5 und dadurch den Werth von Q_5 durch die Gleichung

$$Q_6 = \mu_5 P_5 + Q_5,$$

während die Gleichung

$$Q_5^2 - P_4 P_5 = \frac{1}{4}E$$

den Werth von P_4 ergeben wird; weiss man im Voraus, dass $\frac{-P_3}{P_4} =$ oder < 1 sein muss, so findet man μ_4 und erhält danach Q_4 durch die Gleichung

$$Q_5 = \mu_4 P_4 + Q_4,$$

und dann P_3 durch

$$Q_4^2 - P_3 P_4 = \tfrac{1}{4} E.$$

Jetzt ist es leicht, die allgemeine Schlussfolgerung zu ziehen, dass, wenn P_λ und $P_{\lambda+1}$ die ersten Glieder der Reihe P_1, P_2, P_3, ... mit verschiedenen Zeichen sind, das Glied $P_{\lambda+1}$ und die folgenden stets nach einer gewissen Anzahl von Zwischengliedern wiederkehren werden, und dasselbe gilt für P_λ, wenn $\frac{\pm P_\lambda}{P_{\lambda+1}} =$ oder < 1.

Denn nehmen wir, wie in No. 34, an, man habe gefunden $P_{\omega+2\varrho} = P_\omega$ und $Q_{\omega+2\varrho} = Q_\omega$, und es sei $\omega > \lambda$, d. h. $\omega = \lambda + \nu$; so wird man einerseits vom Gliede P_ω zum Gliede $P_{\lambda+1}$ oder P_λ, aufsteigen, und andererseits vom Gliede $P_{\omega+2\varrho}$ zum Gliede $P_{\lambda+2\varrho+1}$ oder $P_{\lambda+2\varrho}$; und da die Ausgangsglieder beiderseits gleich sind, werden auch alle abgeleiteten Glieder gleich sein, so dass man erhält:

$$P_{\lambda+2\varrho+1} = P_{\lambda+1} \text{ oder sogar: } P_{\lambda+2\varrho} = P_\lambda,$$

wenn $\frac{\pm P_\lambda}{P_{\lambda+1}} =$ oder < 1.

Man kann also im Voraus den Anfang der Perioden in der Reihe P_0, P_1, P_2, P_3, ... beurtheilen und mithin auch in den beiden anderen Reihen Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ... und μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, ...; aber die Länge der Perioden hängt von der Zahl E ab und sogar einzig und allein von E, wie ich beweisen könnte, wenn ich nicht hier zu weit zu gehen befürchtete.

Zusatz III.

37. Was im vorigen Zusatz erwiesen ward, kann noch dazu dienen, folgenden schönen Satz zu beweisen:

Jede Gleichung von der Form $p^2 - Kq^2 = 1$, wo K eine ganze nicht quadratische Zahl ist und p und q zwei unbestimmte Grössen, ist stets in ganzen Zahlen lösbar.

Vergleicht man nämlich die Form $p^2 - Kq^2$ mit der allgemeinen Form $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, so hat man $A = 1$, $B = 0$, $C = -K$; folglich (No. 33)

$$E = B^2 - 4AC = 4K, \text{ und } \tfrac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K}.$$

Es ist also $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$; also

$$\mu < \sqrt{K}, \ Q_1 = \mu, \text{ und } P_1 = \mu^2 - K;$$

woraus ersichtlich: 1. dass P_1 negativ ist und also anderes Zeichen hat als P_0; 2. dass P_1 = oder > 1, denn K und μ sind ganze Zahlen; mithin hat man $\frac{P_0}{-P_1}$ = oder < 1; daraus folgt (No. 36)

$$\lambda = 0, \text{ und } P_{2\varrho} = P_0 = 1;$$

so dass, wenn man die Reihe P_0, P_1, P_2, ... fortsetzt, das Glied $P_0 = 1$ nothwendig nach einer gewissen Anzahl von Gliedern wiederkehrt; also kann man stets unendlich viele Werthe von p und q finden, die den Ausdruck $p^2 - Kq^2 = 1$ werden lassen.

Zusatz IV.

38. Man kann auch folgenden Satz beweisen:

Wenn die Gleichung $p^2 - Kq^2 = \pm H$ in ganzen Zahlen lösbar ist, vorausgesetzt K sei eine positive, nicht quadratische Zahl und H positiv und kleiner als $\sqrt{K}$, so werden die Zahlen p und q solche Werthe haben müssen, dass $\frac{p}{q}$ einen der gegen $\sqrt{K}$ convergirenden Hauptbrüche darstellt.

Angenommen, das obere Zeichen gelte, so dass $p^2 - Kq^2 = H$; so ist:

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{p + q\sqrt{K}}, \quad \frac{p}{q} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)};$$

nun suche man zwei ganze positive Zahlen r und s, kleiner als p und q, so dass $ps - qr = 1$, was immer möglich ist, wie in No. 23 bewiesen wurde, und es wird

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{1}{qs};$$

folglich, indem man diese Gleichung von der vorigen abzieht,

$$\frac{r}{s} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - \frac{1}{qs};$$

mithin weiter:

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)},$$

$$r - s\sqrt{K} = \frac{1}{q}\left[\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - 1\right].$$

Da nun $\frac{p}{q} > \sqrt{K}$ und $H < \sqrt{K}$, so ist offenbar $\frac{H}{\frac{p}{q} + \sqrt{K}} < \frac{1}{2}$, folglich $p - q\sqrt{K} < \frac{1}{2q}$; um so mehr also $\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} < \frac{1}{2}$, da $s < q$; also wird $r - s\sqrt{K}$ negativ und, positiv genommen, $> \frac{1}{2q}$ sein, weil $1 - \frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} > \frac{1}{2}$.

Setzt man $\sqrt{K} = a$, so sind also die beiden Grössen $p - aq$ und $r - as$ denselben Bedingungen unterworfen, wie die Grössen in No. 23; man wird mithin auch die Analyse der No. 24 anwenden und ähnliche Schlüsse ziehen können; u. s. f. (No. 26). Wenn aber $p^2 - Kq^2 = -H$, so muss man r und s so bestimmen, dass $ps - qr = -1$, und man erhält folgende zwei Gleichungen:

$$q\sqrt{K} - p = \frac{H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)},$$

$$s\sqrt{K} - r = \frac{1}{q}\left[\frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)} - 1\right].$$

Da $H < \sqrt{K}$ und $s < q$, so wird $\dfrac{sH}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)} < 1$ sein; so dass $s\sqrt{K} - r$ negativ wird; ich behaupte, dass diese Grösse, positiv genommen, $> q\sqrt{K} - p$ sein wird; dazu muss bewiesen werden, dass

$$\frac{1}{q}\left[1 - \frac{sH}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)}\right] > \frac{H}{q\left(\sqrt{K}+\frac{p}{q}\right)},$$

oder dass

$$1 > \frac{H\left(1+\frac{s}{q}\right)}{\sqrt{K}+\frac{p}{q}}, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt{K}+\frac{p}{q} > H + \frac{sH}{q};$$

aber es ist $H < \sqrt{K}$ (Voraussetzung); also genügt es zu beweisen, dass

$$\frac{p}{q} > \frac{s\sqrt{K}}{q} \quad \text{oder dass} \quad p > s\sqrt{K};$$

aber letzteres findet offenbar statt, denn $s\sqrt{K} - r$ ist negativ, mithin $r > s\sqrt{K}$, und um so mehr $p > s\sqrt{K}$, weil $p > r$.

Also die beiden Grössen $p - q\sqrt{K}$ und $r - s\sqrt{K}$ haben entgegengesetztes Zeichen und der zweite Werth übertrifft den ersteren, abgesehen vom Zeichen, gerade so wie vorhin; also und so fort.

Hat man also eine Gleichung von der Form

$$p^2 - Kq^2 = \pm H$$

in ganzen Zahlen zu lösen, wo $H < \sqrt{K}$, so braucht man nur das in No. 33 gegebene Verfahren zu befolgen und $A = 1$, $B = 0$ und $C = -K$ zu setzen, und wenn man in der Reihe $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{\omega+2\varrho}$ einem Gliede $= \pm H$ begegnet, so hat man die gesuchte Lösung; andernfalls hat man sich davon überzeugt, dass die vorgelegte Gleichung überhaupt keine Lösung in ganzen Zahlen zulässt.

Bemerkung.

39. Wir haben in No. 33 nur eine der Wurzeln der Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

betrachtet und dieselbe als positiv vorausgesetzt; hat diese Gleichung zwei positive Wurzeln, so nimmt man sie beide nach einander für a und schlägt für beide Werthe nach einander dasselbe Verfahren ein; wenn aber eine oder alle beide Wurzeln negativ sind, dann verwandelt man sie zuerst in positive, indem man nur das Zeichen von B wechselt und dann wie vorhin verfährt; nur muss man die Werthe von p und q mit verschiedenen Zeichen ansetzen, d. h. die eine positiv, die andere negativ (No. 29). Im Allgemeinen wird man also dem B das Doppelzeichen $\pm$ geben, und so auch dem $\sqrt{E}$, d. h. man wird $Q_0 = \mp \frac{1}{2} B$ setzen und $\pm$ vor $\sqrt{E}$ schreiben, dabei die Zeichen so ansetzen, dass

$$a = \frac{\pm \frac{1}{2} B \pm \frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$$

positiv wird, was stets auf zweierlei Art geschehen kann; das obere Zeichen von B wird eine positive Wurzel anzeigen, während p und q gleiche Zeichen erhalten; das untere Zeichen von B deutet eine negative Wurzel an und p und q müssen verschiedene Zeichen erhalten.

Beispiel.

40. *Welche ganzen Zahlen muss man für p und q nehmen, damit die Grösse*

$$9p^2 - 118pq + 378q^2$$

so klein als möglich werde.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allgemeinen Formel der III. Aufgabe, so hat man $A = 9$, $B = -118$, $C = 378$, mithin $B^2 - 4AC = 316$: also gehört der Fall unter No. 33. Man setze also $E = 316$ und $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{79}$, und bemerke, dass $\sqrt{79} > 8$ und < 9; da man in den Formeln nur den ganzen Näherungswerth verlangt, so kann man sofort, statt der Wurzel-

grösse $\sqrt{79}$ die Zahlen 8 oder 9 nehmen, je nachdem dieses Radical von den anderen Zahlen derselben Formel abgezogen oder ihnen hinzugefügt wird.

Jetzt giebt man ferner sowohl B als $\sqrt{E}$ das Doppelzeichen $\pm$, und man wendet alsdann diese Zeichen so an, dass

$$a = \frac{\pm 59 \pm \sqrt{79}}{9}$$

positiv wird (No. 39), woraus erhellt, dass man immer für die Zahl 59 das obere Zeichen nehmen muss und für $\sqrt{79}$ sowohl das obere als das untere Zeichen nehmen kann. Man macht also stets $Q_0 = -\frac{1}{2}B$; und $\sqrt{E}$ nimmt man folgweise den grösseren und den kleineren Werth.

Sei nun: 1. $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{79}$ positiv; alsdann vollführt man folgende Rechnung (No. 33):

$$Q_0 = -59, \qquad P_0 = 9, \qquad \mu < \frac{59 + \sqrt{79}}{9} = 7,$$

$$Q_1 = 9.7 - 59 = 4, \qquad P_1 = \frac{16 - 79}{9} = -7, \qquad \mu_1 < \frac{-4 - \sqrt{79}}{-7} = 1,$$

$$Q_2 = -7.1 + 4 = -3, \qquad P_2 = \frac{9 - 79}{-7} = 10, \qquad \mu_2 < \frac{3 + \sqrt{79}}{10} = 1,$$

$$Q_3 = 10.1 - 3 = 7, \qquad P_3 = \frac{49 - 79}{10} = -3, \qquad \mu_3 < \frac{-7 - \sqrt{79}}{-3} = 5,$$

$$Q_4 = -3.5 + 7 = -8, \qquad P_4 = \frac{64 - 79}{-3} = 5, \qquad \mu_4 < \frac{8 + \sqrt{79}}{5} = 3,$$

$$Q_5 = 5.3 - 8 = 7, \qquad P_5 = \frac{49 - 79}{5} = -6, \qquad \mu_5 < \frac{-7 - \sqrt{79}}{-6} = 2,$$

$$Q_6 = -6.2 + 7 = -5, \qquad P_6 = \frac{25 - 79}{-6} = 9, \qquad \mu_6 < \frac{5 + \sqrt{79}}{9} = 1,$$

$$Q_7 = 9.1 - 5 = 4, \qquad P_7 = \frac{16 - 79}{9} = -7, \qquad \mu_7 < \frac{-4 - \sqrt{79}}{-7} = 1,$$

. . . . , ... , ...

Ich breche hier ab, denn ich bemerke, dass $Q_7 = Q_1$ und $P_7 = P_1$, und die Differenz zwischen 1 und 7 ist gerade, also werden die folgenden Glieder gleich den vorhergegangenen sein; man hat also:

$$Q_7 = 4,\ Q_8 = -3,\ Q_9 = 7,\ \ldots,\ P_7 = -7,\ P_8 = 10\ \ldots,$$

so dass man nach Belieben die vorstehenden Reihen ins Unendliche fortsetzen könnte durch blosse Wiederholung derselben Glieder.

2. Nehmen wir nun $\sqrt{79}$ negativ, so gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

$$Q_0 = -59, \qquad P_0 = 9, \qquad \mu < \frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5,$$

$$Q_1 = 9\cdot 5 - 59 = -14, \quad P_1 = \frac{196-79}{9} = 13, \quad \mu_1 < \frac{14+\sqrt{79}}{13} = 1,$$

$$Q_2 = 13\cdot 1 - 14 = -1, \quad P_2 = \frac{1-79}{13} = -6, \quad \mu_2 < \frac{1-\sqrt{79}}{-6} = 1,$$

$$Q_3 = -6\cdot 1 - 1 = -7, \quad P_3 = \frac{49-79}{-6} = 5, \quad \mu_3 < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3,$$

$$Q_4 = 5\cdot 3 - 7 = 8, \quad P_4 = \frac{64-79}{5} = -3, \quad \mu_4 < \frac{-8-\sqrt{79}}{-3} = 5,$$

$$Q_5 = -3\cdot 5 + 8 = -7, \quad P_5 = \frac{49-79}{-3} = 10, \quad \mu_5 < \frac{7+\sqrt{79}}{10} = 1,$$

$$Q_6 = 10\cdot 1 - 7 = 3, \quad P_6 = \frac{9-79}{10} = -7, \quad \mu_6 < \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1,$$

$$Q_7 = -7\cdot 1 + 3 = -4, \quad P_7 = \frac{16-79}{-7} = 9, \quad \mu_7 < \frac{4+\sqrt{79}}{9} = 1,$$

$$Q_8 = 9\cdot 1 - 4 = 5, \quad P_8 = \frac{25-79}{9} = -6, \quad \mu_8 < \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2,$$

$$Q_9 = -6\cdot 2 + 5 = -7, \quad P_9 = \frac{49-79}{-6} = 5, \quad \mu_9 < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3,$$

. . . . , ... , ...

Man kann hier aufhören, da $Q_9 = Q_3$ und $P_9 = P_3$, und die Differenz von 9 und 3 gerade ist; bei Fortsetzung der Reihen würde man nur die bereits gefundenen Glieder wieder erhalten.

Betrachtet man die Werthe der in beiden Fällen gefundenen Glieder $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$, so findet man den kleinsten $= -3$; im ersten Falle ist es P_3, dem p_3 und q_3, und im zweiten ist es P_4, dem p_4 und q_4 entsprechen.

Hieraus folgt, dass der kleinste Werth, den die vorgelegte Grösse annehmen kann, gleich -3 ist; um die entsprechenden Werthe von p und q zu erhalten, nimmt man im ersten Falle μ, μ_1, μ_2, nämlich 7, 1, 1, und bildet die Hauptbrüche $\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{15}{2}$; der dritte Bruch wird also $\frac{p_3}{q_3}$ sein, so dass $p_3 = 15$ und $q_3 = 2$ wird; d. h. die gesuchten Werthe sind $p = 15$, $q = 2$. Im zweiten Falle nimmt man μ, μ_1, μ_2, μ_3 gleich 5, 1, 1, 3 und erhält die Brüche $\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}$; so dass $p_4 = 39$ und $q_4 = 7$; also $p = 39$ und $q = 7$.

Die Werthe, die wir soeben für p und q für das Minimum gefunden haben, sind auch die möglichst kleinsten, aber man kann auch folgeweise immer grössere finden; denn offenbar wird dasselbe Glied -3 nach jedem Zwischenraum von sechs Gliedern wiederkehren, so dass man im ersten Falle $P_3 = -3$, $P_9 = -3$, $P_{15} = -3, \ldots$, und im zweiten $P_4 = -3$, $P_{10} = -3$, $P_{16} = -3$ erhalten wird. Im ersten Falle werden die genügenden Werthe von p und q gleich $p_3, q_3, p_9, q_9, p_{15}, q_{15}, \ldots$, und im zweiten $p_4, q_4, p_{10}, q_{10}, p_{16}, q_{16}, \ldots$ sein. Nun sind die Werthe von $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ im ersten Falle

$$7,\ 1,\ 1,\ 5,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 5,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 5,\ 3,\ \ldots,$$

u. s. f. bis ins Unendliche, weil $\mu_7 = \mu_4$ und $\mu_8 = \mu_2 \ldots$; man braucht also nur nach No. 20 die Hauptbrüche zu bilden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 7, & 1, & 1, & 5, & 3, & 2, & 1, & 1, & 1, & 5, & \ldots, \\ \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{83}{11}, & \frac{264}{35}, & \frac{611}{81}, & \frac{875}{116}, & \frac{1486}{197}, & \frac{2361}{313}, & \frac{13291}{1762}, & \ldots, \end{array}$$

und man kann für p die Zähler des dritten, neunten u. s. f., sowie für q die entsprechenden Nenner nehmen, es wird also $p = 15$, $q = 2$, oder $p = 2361$, $q = 313$, oder u. s. f.

Im zweiten Falle werden die Werthe von $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$

$$5,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

weil $\mu_9 = \mu_3$, $\mu_{16} = \mu_4$, ... Man wird also folgende Brüche bilden:

$$5,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots,$$

$$\frac{5}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{11}{2},\ \frac{39}{7},\ \frac{206}{37},\ \frac{245}{44},\ \frac{451}{81},\ \frac{696}{125},\ \frac{1843}{331},\ \frac{6225}{1118},\ \frac{32968}{5921},\ \ldots,$$

und der vierte, zehnte u. s. f. Bruch ergeben die Grössen p und q, und zwar $p = 39$, $q = 7$, oder $p = 6225$, $q = 1118$, und so fort.

In dieser Weise kann man ordnungsmässig alle p und q finden, die den gegebenen Ausdruck $= -3$ werden lassen, welches der kleinste Werth ist, den er erhalten kann. Auch könnte man eine allgemeine Formel aufstellen, die alle diese Werthe von p und q enthielte; wer sich dafür interessirt, findet sie nach der von uns anderswo entwickelten Methode, von der wir oben sprachen (No. 35).

Wir fanden soeben, dass das Minimum des vorgelegten Ausdruckes $= -3$ sei, also negativ; nun könnte man den kleinsten positiven Werth verlangen, hierzu brauchte man nur die Reihen $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ in beiden Fällen zu prüfen und man ersähe sogleich, dass der kleinste positive Werth in beiden Fällen $= 5$ ist; und da im ersten Falle P_4, und im zweiten P_3 den Werth $= 5$ hat, so sind die kleinsten Werthe von p und q, die den kleinsten positiven Werth des gesuchten Ausdruckes ergeben, p_4, q_4, oder p_{10}, q_{10}, oder u. s. f. im ersten Falle, und im zweiten: p_3, q_3, oder p_9, q_9, u. s. f.; mit Hülfe der oben stehenden Brüche erhält man also: $p = 83$, $q = 11$, oder $p = 13291$, $q = 1762, \ldots$, oder $p = 11$, $q = 2$, oder $p = 1843$, $q = 331$, oder u. s. f.

Man versäume übrigens nicht zu bemerken, dass die Zahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, die in beiden Fällen gefunden worden sind, nichts anderes sind als die Glieder der Kettenbrüche, die die beiden Wurzeln der Gleichung

$$9x^2 - 118x + 378 = 0.$$

darstellen.

Diese Wurzeln sind also folgende

$$7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}},$$

$$5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cdots}}}},$$

Ausdrücke, die man bis ins Unendliche durch einfache Wiederholung der Glieder fortsetzen kann.

Aus Vorstehendem ersieht man, wie man verfahren muss, um die Wurzeln der Gleichungen zweiten Grades in Kettenbrüchen darzustellen.

Scholie.

41. *Euler* hat im XI. Bande der »Neuen Petersburger Commentarien« eine der vorstehenden Methode analoge gegeben, nur ist er dabei von etwas anderen Principien ausgegangen, um die Wurzel aus irgend welcher nicht quadratischen Zahl in einen Kettenbruch zu verwandeln, und hat eine Tabelle hinzugefügt, in welcher für alle Zahlen bis 120 die Wurzeln in Kettenbrüchen mitgetheilt sind. Da diese Tabelle bei verschiedenen Gelegenheiten nützlich sein kann, namentlich für Lösung der unbestimmten Aufgaben zweiten Grades, wie man später sehen wird (§ VII), so glauben wir unseren Lesern einen Gefallen zu erweisen, wenn wir diese Tabelle hier mittheilen. Man wird bemerken, dass einer jeden Wurzel zwei Reihen ganzer Zahlen entsprechen: die obere ist die der P_0, $-P_1$, P_2, $-P_3$, ..., und die untere die der μ, μ_1, μ_2, μ_3, ...

$\sqrt{2}$	1	1	1	1	...									
	1	2	2	2	...									
$\sqrt{3}$	1	2	1	2	1	2	1	...						
	1	1	2	1	2	1	2	...						
$\sqrt{5}$	1	1	1	1	...									
	2	4	4	4	...									
$\sqrt{6}$	1	2	1	2	1	2	1	...						
	2	2	4	2	4	2	4	...						
$\sqrt{7}$	1	3	2	3	1	3	2	3	1	...				
	2	1	1	1	4	1	1	1	4	...				
$\sqrt{8}$	1	4	1	4	1	4	1	...						
	2	1	4	1	4	1	4	...						
$\sqrt{10}$	1	1	1	1	...									
	3	6	6	6	...									
$\sqrt{11}$	1	2	1	2	1	2	1	...						
	3	3	6	3	6	3	6	...						
$\sqrt{12}$	1	3	1	3	1	3	1	...						
	3	2	6	2	6	2	6	...						
$\sqrt{13}$	1	4	3	3	4	1	4	3	3	4	1	...		
	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6	...		
$\sqrt{14}$	1	5	2	5	1	5	2	5	1	...				
	3	1	2	1	6	1	2	1	6	...				
$\sqrt{15}$	1	6	1	6	1	6	1	...						
	3	1	6	1	6	1	6	...						
$\sqrt{17}$	1	1	1	1	1	...								
	4	8	8	8	8	...								
$\sqrt{18}$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	...				
	4	4	8	4	8	4	8	4	8	...				
$\sqrt{19}$	1	3	5	2	5	3	1	3	5	2	5	3	1	...
	4	2	1	3	1	2	8	2	1	3	1	2	8	...
$\sqrt{20}$	1	4	1	4	1	4	1	4	1	...				
	4	2	8	2	8	2	8	2	8	...				
$\sqrt{21}$	1	5	4	3	4	5	1	5	4	3	4	5	1	...
	4	1	1	2	1	1	8	1	1	2	1	1	8	...
$\sqrt{22}$	1	6	3	2	3	6	1	6	3	2	3	6	1	...
	4	1	2	4	2	1	8	1	2	4	2	1	8	...

$\sqrt{23}$ { 1 7 2 7 1 7 2 7 1 . . .
4 1 3 1 8 1 3 1 8 . . .

$\sqrt{24}$ { 1 8 1 8 1 8 1 . . .
4 1 8 1 8 1 8 . . .

$\sqrt{26}$ { 1 1 1 1 . . .
5 10 10 10 . . .

$\sqrt{27}$ { 1 2 1 2 1 2 1 . . .
5 5 10 5 10 5 10 . . .

$\sqrt{28}$ { 1 3 4 3 1 3 4 3 1 . . .
5 3 2 3 10 3 2 3 10 . . .

$\sqrt{29}$ { 1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1 . . .
5 2 1 1 2 10 2 1 1 2 10 . . .

$\sqrt{30}$ { 1 5 1 5 1 5 1 5 1 . . .
5 2 10 2 10 2 10 2 10 . . .

$\sqrt{31}$ { 1 6 5 3 2 3 5 6 1 6 5 . . .
5 1 1 3 5 3 1 1 10 1 1 . . .

$\sqrt{32}$ { 1 7 4 7 1 7 4 7 1 . . .
5 1 1 1 10 1 1 1 10 . . .

$\sqrt{33}$ { 1 8 3 8 1 8 3 8 1 . . .
5 1 2 1 10 1 2 1 10 . . .

$\sqrt{34}$ { 1 9 2 9 1 9 2 9 1 . . .
5 1 4 1 10 1 4 1 10 . . .

$\sqrt{35}$ { 1 10 1 10 1 10 1 10 . . .
5 1 10 1 10 1 10 1 . . .

$\sqrt{37}$ { 1 1 1 1 1 . . .
6 12 12 12 12 . . .

$\sqrt{38}$ { 1 2 1 2 1 2 1 . . .
6 6 12 6 12 6 12 . . .

$\sqrt{39}$ { 1 3 1 3 1 3 1 . . .
6 4 12 4 12 4 12 . . .

$\sqrt{40}$ { 1 4 1 4 1 4 1 . . .
6 3 12 3 12 3 12 . . .

$\sqrt{41}$ { 1 5 5 1 5 5 1 . . .
6 2 2 12 2 2 12 . . .

$\sqrt{42}$ { 1 6 1 6 1 6 1 . . .
6 2 12 2 12 2 12 . . .

$$\sqrt{43}\left\{\begin{array}{lllllllllllllll}1&7&6&3&9&2&9&3&6&7&1&7&6&\ldots\\6&1&1&3&1&5&1&3&1&1&12&1&1&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{44}\left\{\begin{array}{llllllllllll}1&8&5&7&4&7&5&8&1&8&5&\ldots\\6&1&1&1&2&1&1&1&12&1&1&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{45}\left\{\begin{array}{llllllllllllllll}1&9&4&5&4&9&1&9&4&5&4&9&1&9&4&\ldots\\6&1&2&2&2&1&12&1&2&2&2&1&12&1&2&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{46}\left\{\begin{array}{llllllllllllllll}1&10&3&7&6&5&2&5&6&7&3&10&1&10&3&\ldots\\6&1&3&1&1&2&6&2&1&1&3&1&12&1&3&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{47}\left\{\begin{array}{llllllllll}1&11&2&11&1&11&2&11&1&\ldots\\6&1&5&1&12&1&5&1&12&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{48}\left\{\begin{array}{lllllll}1&12&1&12&1&12&\ldots\\6&1&12&1&12&1&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{50}\left\{\begin{array}{lllll}1&1&1&1&\ldots\\7&14&14&14&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{51}\left\{\begin{array}{lllllll}1&2&1&2&1&2&\ldots\\7&7&14&7&14&7&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{52}\left\{\begin{array}{lllllllllllllll}1&3&9&4&9&3&1&3&9&4&9&3&1&3&\ldots\\7&4&1&2&1&4&14&4&1&2&1&4&14&4&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{53}\left\{\begin{array}{llllllllllllll}1&4&7&7&4&1&4&7&7&4&1&4&7&\ldots\\7&3&1&1&3&14&3&1&1&3&14&3&1&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{54}\left\{\begin{array}{lllllllllllllll}1&5&9&2&9&5&1&5&9&2&9&5&1&5&\ldots\\7&2&1&6&1&2&14&2&1&6&1&2&14&2&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{55}\left\{\begin{array}{lllllllllll}1&6&5&6&1&6&5&6&1&6&\ldots\\7&2&2&2&14&2&2&2&14&2&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{56}\left\{\begin{array}{llllllll}1&7&1&7&1&7&1&\ldots\\7&2&14&2&14&2&14&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{57}\left\{\begin{array}{llllllllll}1&8&7&3&7&8&1&8&7&\ldots\\7&1&1&4&1&1&14&1&1&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{58}\left\{\begin{array}{lllllllllll}1&9&6&7&7&6&9&1&9&6&\ldots\\7&1&1&1&1&1&1&14&1&1&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{59}\left\{\begin{array}{llllllllll}1&10&5&2&5&10&1&10&5&\ldots\\7&1&2&7&2&1&14&1&2&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{60}\left\{\begin{array}{llllllll}1&11&4&11&1&11&4&\ldots\\7&1&2&1&14&1&2&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{61}\left\{\begin{array}{lllllllllllllll}1&12&3&4&9&5&5&9&4&3&12&1&12&3&\ldots\\7&1&4&3&1&2&2&1&3&4&1&14&1&4&\ldots\end{array}\right.$$

$$\sqrt{62}\left\{\begin{array}{cccccccc} 1 & 13 & 2 & 13 & 1 & 13 & 2 & \ldots \\ 7 & 1 & 6 & 1 & 14 & 1 & 6 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{63}\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & 14 & 1 & 14 & 1 & 14 & \ldots \\ 7 & 1 & 14 & 1 & 14 & 1 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{65}\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 8 & 16 & 16 & 16 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{66}\left\{\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \ldots \\ 8 & 8 & 16 & 8 & 16 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{67}\left\{\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 3 & 6 & 7 & 9 & 2 & 9 & 7 & 6 & 3 & 1 & 3 & 6 & \ldots \\ 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 2 & 5 & 16 & 5 & 2 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{68}\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 & \ldots \\ 8 & 4 & 16 & 4 & 16 & 4 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{69}\left\{\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 5 & 4 & 11 & 3 & 11 & 4 & 5 & 1 & 5 & 4 & \ldots \\ 8 & 3 & 3 & 1 & 4 & 1 & 3 & 3 & 16 & 3 & 3 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{70}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 6 & 9 & 5 & 9 & 6 & 1 & 6 & 9 & \ldots \\ 8 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 16 & 2 & 1 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{71}\left\{\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 7 & 5 & 11 & 2 & 11 & 5 & 7 & 1 & 7 & 5 & \ldots \\ 8 & 2 & 2 & 1 & 7 & 1 & 2 & 2 & 16 & 2 & 2 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{72}\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & 8 & 1 & 8 & 1 & 8 & \ldots \\ 8 & 2 & 16 & 2 & 16 & 2 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{73}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 9 & 8 & 3 & 3 & 8 & 9 & 1 & 9 & 8 & \ldots \\ 8 & 1 & 1 & 5 & 5 & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{74}\left\{\begin{array}{ccccccccc} 1 & 10 & 7 & 7 & 10 & 1 & 10 & 7 & \ldots \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{75}\left\{\begin{array}{cccccccc} 1 & 11 & 6 & 11 & 1 & 11 & 6 & \ldots \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{76}\left\{\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 12 & 5 & 8 & 9 & 3 & 4 & 3 & 9 & 8 & 5 & 12 & 1 & 12 & 5 & \ldots \\ 8 & 1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 1 & 16 & 1 & 2 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{77}\left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 13 & 4 & 7 & 4 & 13 & 1 & 13 & 4 & \ldots \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 16 & 1 & 3 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{78}\left\{\begin{array}{cccccccc} 1 & 14 & 3 & 14 & 1 & 14 & 3 & \ldots \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 16 & 1 & 4 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{79}\left\{\begin{array}{cccccccc} 1 & 15 & 2 & 15 & 1 & 15 & 2 & \ldots \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 16 & 1 & 7 & \ldots \end{array}\right.$$

$$\sqrt{80}\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & \ldots \\ 8 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & \ldots \end{array}\right.$$

mithin

$$ax - by = a\alpha - b\beta,$$

oder

$$a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0;$$

woraus:

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

Nun drücke man $\frac{b}{a}$ in den kleinsten Zahlen aus und man erhalte so $\frac{b_1}{a_1}$, wo b_1 und a_1 relativ prim zu einander sind, alsdann kann die Gleichung

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b_1}{a_1}$$

nur bestehen, da $x - \alpha$ und $y - \beta$ ganze Zahlen sind, wenn $x - \alpha = mb_1$, $y - \beta = ma_1$, wo m irgend eine ganze Zahl ist; also hat man allgemein:

$$x = \alpha + mb_1, \quad y = \beta + ma_1,$$

wo m irgend eine unbestimmte ganze Zahl ist.

Da man nach Belieben m positiv oder negativ nehmen kann, so ist es leicht ersichtlich, dass sich stets m so wählen lässt, dass der Werth von x, abgesehen vom Zeichen, nicht grösser sei als $\frac{b_1}{2}$, oder y nicht grösser als $\frac{a_1}{2}$; hieraus folgt, dass, wenn die vorgelegte Gleichung

$$ax - by = c$$

in ganzen Zahlen lösbar ist, und man an Stelle von x alle positiven und negativen Zahlen zwischen den Grenzen $\frac{b_1}{2}$ und $\frac{-b_1}{2}$ einsetzt, man nothwendig auf einen Werth stossen muss, der der Gleichung genügt; ebenso wird man unter den ganzen positiven und negativen Werthen zwischen $\frac{a_1}{2}$ und $\frac{-a_1}{2}$ einen Werth von y finden, der genügt.

Auf diese Art kann man eine erste Lösung der vorgelegten Gleichung finden, während die Formel alle übrigen

43. Will man aber nicht die soeben vorgeschlagene Methode des Herumtastens anwenden, denn sie dürfte oft sehr mühselig sein, so kann man die im ersten Kapitel von *Eulers* Algebra mitgetheilte gebrauchen; sie ist sehr einfach und sehr direct; man kann aber auch auf folgende Art verfahren.

Man bemerke:

Dass 1., wenn a und b nicht relativ prim sind, die Gleichung in ganzen Zahlen nur dann bestehen kann, wenn die gegebene Zahl c ein Vielfaches des grössten gemeinsamen Theilers von a und b wäre; nimmt man die Division als ausgeführt an, und bezeichnet die Quotienten mit a_1, b_1, c_1, so hat man die Gleichung

$$a_1 x - b_1 y = c_1$$

zu lösen, wo a und b relativ prim sind.

Dass 2., wenn man die Werthe von p und q finden kann, die der Gleichung

$$a_1 p - b_1 q = \pm 1$$

genügen, man auch die vorstehende Gleichung lösen kann; denn multiplicirt man diese Werthe mit $\pm c_1$, so hat man Werthe, die der Gleichung

$$a_1 x - b_1 y = c_1;$$

genügen, d. h. man hat

$$x = \pm p c_1, \quad y = \pm q c_1.$$

Aber die Gleichung

$$a_1 p - b_1 q = \pm 1$$

ist immer in ganzen Zahlen lösbar, wie das in No. 23 bewiesen wurde; um die kleinsten genügenden Werthe von p und q zu finden, braucht man nur den Bruch $\frac{b_1}{a_1}$ nach der Methode No. 4 in einen Kettenbruch zu verwandeln und dann nach No. 10 die Reihe der gegen denselben Bruch $\frac{b_1}{a_1}$ convergirenden Hauptbrüche herzuleiten; der letzte dieser Werthe wird der Bruch $\frac{b_1}{a_1}$ selbst sein, und nennt man den vorletzten

$\frac{p}{q}$, so wird nach dem Gesetz dieser Brüche (No. 12)

$$a_1 p - b_1 q = \pm 1,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Ordnungszahl von $\frac{p}{q}$ gerade ist, und das untere Zeichen, wenn diese Zahl ungerade ist. Sobald die Werthe von p und q bekannt sind, hat man zunächst:

$$x = \pm p c_1, \quad y = \pm q c_1,$$

und nimmt man nun diese Werthe für α und β, so hat man im Allgemeinen (No. 42)

$$x = \pm p c_1 + m b_1, \quad y = \pm q c_1 + m a_1,$$

Ausdrücke, die nothwendig alle möglichen Lösungen der vorgelegten Gleichung in ganzen Zahlen enthalten.

Um übrigens keinen Zweifel hinsichtlich der praktischen Anwendung dieser Methode übrig zu lassen, wollen wir bemerken, dass, obwohl die Zahlen a und b positiv und negativ sein können, man sie doch immer positiv annehmen darf, wenn man nur dem x entgegengesetzte Zeichen ertheilt, wenn a negativ, und dem y, wenn b negativ ist.

Beispiel.

44. Um von vorstehender Methode ein Beispiel zu geben, wollen wir die in No. 14 des ersten Capitels von *Euler*s Algebra gestellte Aufgabe behandeln, wo es sich darum handelte, die Gleichung

$$39p = 56q + 11;$$

zu lösen; schreiben wir x statt p und y statt q, so haben wir:

$$39x - 56y = 11.$$

Wir machen also $a = 39$, $b = 56$, $c = 11$; und da 56 und 39 schon relativ prim zu einander sind, so haben wir: $a_1 = 39$, $b_1 = 56$, $c_1 = 11$. Man entwickele also den Bruch $\frac{b_1}{a_1} = \frac{56}{39}$ in einen Kettenbruch, und mache dazu (wie schon in No. 20 geschehen), die folgende Rechnung:

39	56	1				
	39					
	17	39	2			
		34				
		5	17	3		
			15			
			2	5	2	
				4		
				1	2	2
					2	
					0.	

Mit Hülfe der Quotienten 1, 2, 3, ... bilde man darauf die Brüche

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 2,\quad 2,$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{23}{16},\ \frac{56}{39},$$

und der vorletzte Bruch $\frac{23}{16}$ ist es, den wir allgemein mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet haben; so erhält man $p = 23$, $q = 16$; und da dieser Bruch der vierte und mithin ein geradzahliger ist, so muss man das obere Zeichen nehmen und erhält allgemein:

$$x = 23.11 + 56m, \quad y = 16.11 + 39m,$$

wo m eine beliebige ganze positive oder negative Zahl sein kann.

Bemerkung.

45. Die erste Lösung vorstehender Aufgabe verdankt man *Bachet de Méziriac*, der sie in der zweiten Ausgabe seiner »Recréations mathématiques« unter dem Titel »Problèmes plaisans et délectables, etc.« gegeben hat. Die erste Auflage dieser Arbeit erschien 1612; aber da wurde die fragliche Lösung nur angekündigt, und erst in der Auflage von 1624 findet man sie vollständig. *Bachet*'s Methode ist eine sehr directe und sehr geistreiche und lässt in Hinsicht auf Eleganz und Allgemeinheit nichts zu wünschen übrig.

Wir ergreifen mit Vergnügen diese Gelegenheit, dem Autor die ihm in Hinsicht auf diesen Gegenstand schuldige Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, denn wir haben bemerkt,

dass diejenigen, die dieselbe Aufgabe nach ihm behandelt haben, ihn gar nicht erwähnen.

In Kurzem ist folgendes *Bachet*'s Methode: Nachdem er gezeigt hat, wie die Lösung der Gleichung von der Form

$$ax - by = c,$$

wo a und b relativ prim sind, auf

$$ax - by = \pm 1$$

zurückgeführt werden kann, geht er an die Lösung dieser letzten Gleichung und dazu schreibt er vor, man verfahre mit a und b gerade so, wie wenn man den grössten gemeinsamen Theiler aufzusuchen habe (gerade wie auch wir thaten); dann nennt er $c, d, e, f, \ldots$ die aus den Divisionen sich ergebenden Reste und lässt etwa f den letzten sein, der nothwendig gleich 1 sein wird (weil a und b relativ prim sind), und macht, wenn die Anzahl der Reste eine gerade ist,

$$e \mp 1 = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \quad \frac{\delta c \mp 1}{d} = \gamma, \quad \frac{\gamma b \pm 1}{c} = \beta,$$

$$\frac{\beta a \mp 1}{b} = \alpha;$$

und diese letzten β und α werden die kleinsten Werthe von x und y sein.

Ist die Anzahl der Reste ungerade, und wäre etwa g der letzte Rest $= 1$, so müsste man setzen

$$f \pm 1 = \zeta, \quad \frac{\zeta e \mp 1}{f} = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \ldots$$

Man erkennt leicht, dass diese Methode im Grunde auf die des ersten Kapitels hinauskommt; aber sie ist weniger bequem, weil sie Divisionen verlangt; die Geometer übrigens, die sich für diese Frage interessiren, werden mit Vergnügen in der Arbeit von *Bachet* sehen, was er für Kunstgriffe gebraucht, um zu der vorstehenden Regel zu gelangen, um daraus die vollständige Lösung der Gleichungen von der Form

$$ax - by = c.$$

herzuleiten.

§ IV. Methoden um in ganzen Zahlen unbestimmte Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, wenn die eine der letzteren den ersten Grad nicht übersteigt und wenn die beiden Unbekannten Producte nur einer und derselben Dimension bilden.

(Zusatz zum III. Kapitel.)

46. Es sei die allgemeine Gleichung

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + hx^4 + kx^3y + \ldots = 0$$

vorgelegt, in welcher die Coefficienten a, b, c, ... gegebene ganze Zahlen und x und y zwei unbestimmte, gleichfalls ganze Zahlen sind.

Drückt man y durch x aus, so kommt:

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + ha^4 + \ldots}{c + ex + gx^2 + kx^3 + \ldots};$$

mithin kommt die Aufgabe darauf hinaus, eine ganze Zahl für x zu bestimmen, die den Zähler vorstehenden Ausdrucks durch den Nenner theilbar erscheinen lässt.

Es sei

$$p = a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \ldots,$$
$$q = c + ex + gx^2 + kx^3 + \ldots,$$

und man eliminire x aus diesen beiden Gleichungen nach gewöhnlichen Regeln der Algebra, so erhält man schliesslich eine Gleichung von der Form:

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \ldots = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C, ... rationale ganze Functionen von a, b, c, ... sein werden.

Da nun $y = -\frac{p}{q}$, so ist auch $p = -qy$; substituirt man diesen Werth von p, so kommt:

$$A - Byq + Cq + Dy^2q^2 - Eq^2y + Fq^2 + \ldots = 0,$$

woraus erhellt, dass alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, mit q multiplicirt erscheinen; also muss die Zahl A durch q

theilbar sein, sonst könnten q und y nicht zugleich ganze Zahlen sein.

Man sucht also alle Factoren der ganzen Zahl A auf und nimmt folgweise einen jeden derselben für q; eine jede solche Einsetzung wird eine bestimmte Gleichung in x geben, deren rationale ganze Wurzeln, falls solche vorhanden sind, man nach bekannten Methoden aufsucht; diese Wurzeln setzt man dann an Stelle von x und sieht nun zu, ob die resultirenden Werthe von p und q so beschaffen sind, dass sie $\frac{p}{q}$ zu einer ganzen Zahl machen. Auf diesem Wege ist man sicher, alle ganzen Werthe von x zu finden, die zugleich ganze Werthe von y in dem vorgelegten Ausdruck ergeben können.

Hieraus erhellt, dass bei solchen Gleichungen die Anzahl von Lösungen in ganzen Zahlen stets eine beschränkte ist; ausgenommen einen Fall, der aus vorstehender Methode heraustritt.

47. Dieser Fall tritt ein, wenn $e, g, k, \ldots$ gleich 0 sind, alsdann wird einfach:

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \ldots}{c};$$

auf folgende Art muss man verfahren, um alle Werthe von x zu finden, die den Ausdruck

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \ldots$$

durch c theilbar werden zu lassen: gesetzt, man habe eine ganze Zahl n gefunden, die dieser Bedingung genügt; alsdann ist leicht ersichtlich, dass eine jede Zahl von der Form $n \pm \mu c$ gleichfalls genügen wird, wenn μ eine ganze Zahl ist; wenn ferner $n > \frac{c}{2}$ (abgesehen vom Zeichen von n und c), so kann man immer μ und sein Zeichen so bestimmen, dass $n \pm \mu c < \frac{c}{2}$ wird; und zwar kann dieses nur auf eine einzige Art geschehen, da n und c gegeben sind; heisse nun n_1 dieser Werth von $n \pm \mu c$, der kleiner ist als $\frac{c}{2}$ und der der fraglichen Bedingung genügt, so hat man allgemein

$$n = n_1 \mp \mu c,$$

wo μ irgend eine Zahl bedeutet.

Hieraus schliesse ich, dass, wenn man folgweise in den Ausdruck

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + \dots$$

an Stelle von x alle positiven und negativen Zahlen einsetzt, die kleiner sind als $\frac{c}{2}$, und wenn man mit $n_1, n_2, n_3, \dots$ diejenigen Zahlen bezeichnet, die den Ausdruck $a + bx + dx^2 +, \dots$ durch c theilbar machen, alle anderen Zahlen, die dasselbe leisten, nothwendig in den Formen

$$n_1 \pm \mu_1 c, \quad n_2 \pm \mu_2 c, \quad n_3 \pm \mu_3 c, \dots$$

enthalten sind, wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ irgend welche ganze Zahlen bedeuten.

Hier könnte man verschiedene Bemerkungen einschalten, um das Aufsuchen der Zahlen $n_1, n_2, n_3, \dots$ zu erleichtern; aber wir glauben uns nicht länger bei dieser Frage aufhalten zu müssen, da wir dieselbe schon früher behandelt haben in einer Abhandlung der Berliner Akademie von 1768, die den Titel führt: Nouvelle Méthode pour résoudre les Problèmes indéterminées*), Vergl. auch Mém. von Legendre »sur l'analyse indéterminée, im Recueil de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1785.

48. Behandeln wir nun die Gleichung von der Form:

$$ay^m + by^{m-1}x + cy^{m-2}x^2 + dy^{m-3}x^3 + \dots = h,$$

in welcher $a, b, c, \dots, h$ gegebene ganze Zahlen sind, und wo die Unbestimmten x und y, die überall in derselben Dimension vorkommen, gleichfalls ganze Zahlen sein müssen.

Ich werde zunächst voraussetzen, dass x und y relativ prim und ausserdem auch y und h relativ prim sind; ich behaupte, man könne $x = ny - hz$ setzen, wo n und z unbestimmte ganze Zahlen sind; denn, sieht man x, y und h als gegebene Zahlen an, so hat man eine in ganzen Zahlen nach der Methode des § III lösbare Gleichung, weil nach der Voraussetzung y und h ausser der Einheit keinen gemeinsamen Factor haben. Man setze diesen Ausdruck von x in die vorgelegte Gleichung, so wird dieselbe:

*) Œuvres de Lagrange, t. II, p. 655.

$$(a+bn+cn^2+dn^3+\ldots)y^m-(b+2cn+3dn^2+\ldots)hy^{m-1}z$$
$$+(c+3dn+\ldots)h^2y^{m-2}z^2-\ldots=h,$$

und man sieht, dass alle Glieder schon durch h theilbar sind, ausgenommen das erste

$$(a+bn+cn^2+dn^3+\ldots)y^m.$$

Damit also die Gleichung in ganzen Zahlen bestehen könne, muss auch der vorstehende Ausdruck durch h theilbar sein. Wir setzten aber voraus, dass h und y relativ prim seien; folglich muss

$$a+bn+cn^2+dn^3+\ldots$$

selbst durch h theilbar sein. Also braucht man nur nach der Methode der vorigen Nummer alle Werthe von n aufzusuchen, die dieser Bedingung genügen; macht man für einen jeden dieser Werthe

$$a+bn+cn^2+dn^3+\ldots=hA,$$
$$b+2cn+3dn^2+\ldots=B,$$
$$c+3dn+\ldots=C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so wird die vorgelegte Gleichung, nach diesen Substitutionen und nach Division aller Glieder durch h:

$$Ay^m-By^{m-1}z+hCy^{m-2}z^2-\ldots=1;$$

und da diese Gleichung eine in No. 30 behandelte Form hat, so ist sie allen in § II gegebenen Methoden zugänglich, und man kann alle genügenden Werthe von y und z finden. Diese Werthe sowie die von n sind also bekannt und man erhält allgemein:

$$x=ny-hz.$$

Wir setzten voraus, x und y seien relativ prim und ebenso y und h; diese Annahme ist erlaubt, weil x und y unbestimmt sind; da aber diese Voraussetzungen nicht absolut nothwendig sind, so erübrigt noch zu untersuchen, in welchen Fällen sie fortfallen. Angenommen also: 1. x und y hätten einen gemeinsamen Factor α; alsdann braucht man nur in der

vorgelegten Gleichung αx_1, αy_1 an Stelle von x und y zu setzen und dann x_1 und y_1 als relativ prim anzusehen. Durch diese Substitution aber werden offenbar alle Glieder des ersten Theiles der Gleichung mit α^m multiplicirt erscheinen; also muss der zweite Theil h durch α^m theilbar sein; daher kann man für α nur die in h enthaltenen Factoren nehmen, die sich in der m-ten Potenz in demselben vorfinden. Enthält nun h keinen Factor in der m-ten Potenz, so kann man sicher sein, dass x und y nothwendig relativ prim sind.

Enthält h einen oder mehrere Factoren in der Potenz m, so muss man einen jeden einzeln oder eine Combination solcher für h nehmen, und man erhält ebenso viele verschiedene Lösungen, indem man in einer jeden von ihnen x_1 und y_1 als relativ prim gegen einander betrachtet.

Angenommen 2. y und h hätten einen gemeinsamen Theiler β; dann setze man βy_1 und βh_1 anstatt y und h, und sehe y_1 und h_1 als relativ prim an. Durch solche Substitutionen werden alle Glieder des ersten Theiles, die y enthalten, mit einer Potenz von β multiplicirt erscheinen; nur das letzte, das wir mit gx^m bezeichnen wollen, und das kein y enthält, wird auch den Factor β nicht haben. Da aber der zweite Theil h gleich βh_1 wird, wird auch gx^m durch β theilbar sein; da nun y und x relativ prim sind, so kann x nicht durch β theilbar sein; mithin muss es der Coefficient g sein. Daraus schliesse ich, dass man folgweise für β alle Theiler von g nehmen kann, und man wird, nach der Einsetzung von βy_1 und βh_1 statt y und h und nach Division der ganzen Gleichung durch β wieder den Fall vor sich haben, wo die Unbestimmte y_1 nothwendig prim zu h_1 sein wird, welches auf der rechten Seite der Gleichung steht.

§ V. Directe allgemeine Methode, die Werthe von x zu finden, die Ausdrücke von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$ rational machen, und die unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen zu lösen, wenn sie solche Lösungen zulassen.

(Zusatz zum IV. Kapitel.)

49. Angenommen zunächst, die bekannten Zahlen a, b, c seien ganze; wären sie Brüche, so brauchte man sie bloss auf einen quadratischen Nenner zu bringen und dann könnte man

offenbar stets vom Nenner absehen; die Zahl x mag man ganz oder gebrochen annehmen, und man wird in der Folge sehen, wie die Aufgabe zu behandeln ist, wenn man nur ganze Zahlen zulässt.

Es sei also

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = y,$$

und es folgt

$$2cx + b = \sqrt{4cy^2 + b^2 - 4ac};$$

somit besteht die Schwierigkeit darin, den Ausdruck

$$\sqrt{4cy^2 + b^2 - 4ac}$$

rational zu machen.

50. Angenommen allgemein, man habe die Grösse $\sqrt{Ay^2 + B}$ rational d. h.

$$Ay^2 + B$$

gleich einem Quadrat zu machen, wo A und B gegebene ganze, positive oder negative Zahlen sind und y eine unbestimmte aber rationale Zahl. Wäre nun A oder B gleich 1 oder gleich einem beliebigen Quadrat, so wäre die Aufgabe durch die im IV. Kapitel gegebenen bekannten Methoden des Diophantus lösbar, deshalb sehen wir hier von diesem Falle ab, oder besser: wir wollen alle anderen Fälle auf diesen zurückführen.

Wären ferner die Zahlen A und B durch irgend welche Quadratzahlen theilbar, so könnte man auch von diesen Theilern absehen, d. h. man könnte sie fortschaffen, indem man statt A und B nur die Quotienten nimmt nach Division ihrer Werthe durch die möglichst grössten Quadrate; sei in der That $A = \alpha^2 A_1$, und $B = \beta^2 B_1$, so müsste man $A_1 \alpha^2 y^2 + B_1 \beta^2$ in ein Quadrat verwandeln; dividirt man durch β^2 und macht $\frac{\alpha y}{\beta} = y_1$, so erübrigt die Unbekannte y_1 so zu bestimmen, dass

$$A_1 y_1^2 + B_1$$

ein Quadrat werde. Hieraus folgt, dass, sobald ein Werth von y gefunden ist, der $Ay^2 + B$ in ein Quadrat verwandelt, man in A und B nur die quadratischen Factoren, die darin enthalten sind, fortzulassen, und danach den gefundenen Werth von y mit $\frac{\beta}{\alpha}$ zu multipliciren braucht, um die dem vorgelegten Ausdruck genügende Grösse zu finden.

51. Betrachten wir also die Form $Ay^2 + B$, in welcher A und B gegebene, durch kein Quadrat theilbare Zahlen seien; da y ein Bruch sein könnte, setzen wir $y = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze relativ prime Zahlen sind, womit der Bruch auf seine kleinsten Ziffern gebracht wäre; es muss also die Grösse

$$\frac{Ap^2}{q^2} + B$$

ein Quadrat werden; also auch $Ap^2 + Bq^2$ muss ein solches sein; man hat also die Gleichung

$$Ap^2 + Bq^2 = z^2$$

zu lösen, wo p, q und z ganze Zahlen sein sollen.

Zunächst werde ich beweisen, dass q und A relativ prim gegen einander sein müssen und ebenso zu B; denn wenn q und A einen gemeinsamen Theiler hätten, so wäre das Glied Bq^2 durch das Quadrat dieses Theilers theilbar, während Ap^2 nur durch die erste Potenz dieses Divisors theilbar wäre, weil p und q relativ prim sind und A kein Quadrat als Factor enthält; folglich wäre $Ap^2 + Bq^2$ nur einmal durch den gemeinsamen Theiler von A und q theilbar; mithin kann diese Zahl kein Quadrat sein. Ebenso beweist man, dass auch p und B keinen gemeinsamen Theiler haben können.

Lösung der Gleichung $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ in ganzen Zahlen.

52. Es sei $A > B$; man schreibe die Gleichung

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2,$$

und bemerke, dass, da p, q, und z ganze Zahlen sein sollen, $z^2 - Bq^2$ durch A theilbar sein muss.

Da nun A und q relativ prim gegen einander sind, so mache man nach der Methode des § IV, No. 48,

$$z = nq - Aq_1,$$

wo n und q_1 zwei ganze unbestimmte Zahlen sind; dadurch geht die Form $z^2 - Bq^2$ über in:

$$(n^2 - B)q^2 - 2nAqq_1 + A^2q_1^2,$$

wo $n^2 - B$ durch A theilbar sein muss, indem man für n eine ganze Zahl nimmt, die nicht grösser als $\frac{A}{2}$ ist.

Man setze also für n alle ganzen Zahlen kleiner als $\frac{A}{2}$ ein, und findet man keine, die $n^2 - B$ durch A theilbar erscheinen lässt, so findet man sofort, dass die Gleichung

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2$$

nicht in ganzen Zahlen lösbar sei, und dass mithin die Grösse $Ay^2 + B$ niemals ein Quadrat werden könne.

Findet man dagegen einen oder mehrere Werthe für n, die genügen, so setze man sie folgweise für n ein und vollführe die Rechnung in folgender Weise.

Zuvor bemerke ich nur noch, dass es überflüssig wäre, dem n grössere Werthe als $\frac{A}{2}$ zu ertheilen; denn wenn n_1, n_2, n_3, ... diejenigen sind, die kleiner als $\frac{A}{2}$ sind und die $n^2 - B$ durch A theilbar machen, so werden alle anderen Werthe von n, die dasselbe erreichen lassen, in den Formen der No. 47 des § IV enthalten sein:

$$n_1 \pm \mu_1 A, \quad n_2 \pm \mu_2 A, \quad n_3 \pm \mu_3 A, \quad \ldots;$$

und setzt man diese Werthe anstatt n in die Form

$$(n^2 - B)q^2 - 2nAqq_1 + A^2 q_1^2, \text{ d. h. } (nq - Aq_1)^2 - Bq^2,$$

so erhält man offenbar dieselben Resultate, als wenn man nur n_1, n_2, n_3, ... anstatt n setzte und den q_1 die Grössen $\mp \mu_1 q$, $\mp \mu_2 q$, $\mp \mu_3 q$ hinzufügte, so dass, da q eine unbestimmte Zahl ist, diese Substitutionen keine anderen als die durch einfache Einsetzung von n_1, n_2, n_3, ... erhaltenen Ausdrücke ergäben.

53. Da nun $n^2 - B$ durch A theilbar sein muss, so sei A_1 der Quotient dieser Division, so dass $AA_1 = n^2 - B$; und die Gleichung

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2 = (n^2 - B)q^2 - 2nAqq_1 + A^2q_1^2,$$

wird nach Division durch A übergehen in:

$$p^2 = A_1 q^2 - 2nqq_1 + Aq_1^2,$$

wo A_1 nothwendig kleiner als A sein wird, weil $A = \frac{n^2 - B}{A}$ und weil $B < A$, und n nicht $> \frac{A}{2}$.

Wenn nun 1. A_1 ein Quadrat ist, so ist diese Gleichung offenbar durch bekannte Methoden zu lösen und man wird die einfachste Lösung erhalten, indem man $q_1 = 0$, $q = 1$ und $p = \sqrt{A_1}$ setzt.

Wenn 2. A_1 kein Quadrat ist, so sehe man zu, ob es kleiner als B ist oder wenigstens ob es durch irgend ein Quadrat so theilbar erscheint, dass der Quotient, abgesehen vom Zeichen, kleiner als B wird; alsdann multiplicire man die ganze Gleichung mit A_1, und man erhält, weil $AA_1 - n^2 = -B$ ist.

$$A_1 p^2 = (A_1 q - n q_1)^2 - B q_1^2;$$

es muss alsdann

$$B q_1^2 + A_1 p^2$$

ein Quadrat sein; dividirt man also durch p^2 und macht $\frac{q_1}{p} = y_1$ und $A_1 = C$, so muss man

$$B y_1^2 + C$$

in ein Quadrat verwandeln, und diese Form ist analog der in No. 50. Wenn nun C einen quadratischen Factor γ^2 enthält, so kann man denselben fortlassen, wenn man beachtet, dass man später den gefundenen Werth von y_1 mit γ zu multipliciren hat, um den wahren Werth zu erhalten; man erhält so eine Form, die mit der in No. 51 stimmt, mit dem Unterschiede bloss, dass die Coefficienten B und C hier kleiner sein werden, als die Coeficienten A und B dort.

54. Wenn aber A_1 nicht kleiner ist als B und es auch nicht werden kann durch Division durch den grössten in ihm enthaltenen Quadratfactor, so mache man $q = \nu q_1 + q_2$; setzt man diesen Werth in die Gleichung ein, so geht sie über in:

$$p^2 = A_1 q_2^2 - 2 n_1 q_2 q_1 + A_2 q_1^2,$$

wo

$$n_1 = n - \nu A_1, \text{ und } A_2 = A_1 \nu^2 - 2 n \nu + A = \frac{n_1^2 - B}{A_1}.$$

Man wird nun, was immer möglich ist, die ganze Zahl ν so bestimmen, dass n_1, abgesehen vom Zeichen, nicht grösser als $\frac{A_1}{2}$ ist, und dann wird offenbar A_2 kleiner als A_1 sein, weil $A_2 = \frac{n_1^2 - B}{A_1}$ und weil $B =$ oder $< A_1$, und $n_1 =$ oder $< \frac{A_1}{2}$.

Man wird also hier dieselbe Ueberlegung anstellen, wie in der vorigen Nummer, und wenn A_2 ein Quadrat ist, wird die Lösung schon vorliegen; ist A_2 kein Quadrat, aber kleiner als B oder wird es kleiner als B nach Division durch ein Quadrat, so multiplicire man die Gleichung mit A_2 und, indem man $\frac{p}{q_2} = y_1$ und $A_2 = C$ macht, wird die Form

$$By_1^2 + C,$$

ein Quadrat sein müssen; die Coefficienten B und C (nach Entfernung quadratischer Divisoren, falls solche vorhanden sind) werden kleiner sein als die Coefficienten der Form $Ay^2 + B$ in No. 51.

Wenn aber diese Fälle nicht eintreten, wird man, wie oben, $q_1 = \nu_1 q_2 + q_3$ machen und die Gleichung geht über in folgende:

$$p^2 = A_3 q_2^2 - 2 n_2 q_2 q_3 + A_2 q_3^2,$$

wo

$$n_2 = n_1 - \nu_1 A_2, \text{ und } A_3 = A_2 \nu_1^2 - 2 n_1 \nu_1 + A_1 = \frac{n_2^2 - B}{A_2}.$$

Man wird also für ν_1 eine ganze Zahl nehmen, so dass n_2 nicht grösser als $\frac{A_2}{2}$ wird, abgesehen vom Zeichen; und da B nicht grösser als A_2 (Voraussetzung), so folgt aus der Gleichung

$$A_3 = \frac{n_2^2 - B}{A_2},$$

dass $A_3 < A_2$ sein wird; und aus diesem Grunde kann man die Ueberlegungen von vorhin jetzt wiederholen und ähnliche Schlüsse ziehen, u. s. f.

Da nun die Zahlen A, A_1, A_2, A_3, ... eine abnehmende Reihe ganzer Zahlen bilden, so ist es klar, dass man bei Fortsetzung dieser Reihe nothwendig auf einen Werth kleiner als B stossen muss; und wenn wir diesen mit C bezeichnen, so muss, wie oben gezeigt ist, die Form

$$By_1^2 + C$$

ein Quadrat werden; durch das angezeigte Verfahren kann man sicher sein, die Form $Ay^2 + B$ auf eine andere, einfachere, wie $By_1^2 + C$ zurückzuführen, wenigstens dann, wenn das Problem überhaupt lösbar ist.

55. Ebenso wie man die Form $Ay^2 + B$ auf $By_1^2 + C$ zurückgeführt hat, kann diese letztere auf

$$Cy_2^2 + D,$$

wo $D < C$ ist, gebracht werden, u. s. f.; da nun die Zahlen A, B, C, D, ... eine abnehmende Reihe ganzer Zahlen bildet, so kann sie unmöglich bis ins Unendliche fortgehen, das Verfahren findet vielmehr ein Ende. Lässt die Aufgabe keine Lösung in ganzen Zahlen zu, so gelangt man doch stets zu einer Gleichung wie in No. 53, wo einer der Coefficienten, wie A, ein Quadrat sein wird, so dass die bekannten Methoden Anwendung finden; ist aber diese Gleichung gelöst, so kann man zurückgehend folgweise alle vorhergehenden Gleichungen lösen bis zur ersten

$$Ap^2 + Bq^2 = z^2.$$

Wir wollen nun ein Beispiel zur Verdeutlichung der Methode geben.

1. Beispiel.

56. *Es soll ein rationaler Werth von x gefunden werden, so dass der Ausdruck*

$$7 + 15x + 13x^2$$

ein Quadrat werde. (Siehe Kapitel IV, Nr. 49 von *Eulers* Algebra.)

Jetzt ist $a = 7$, $b = 15$, $c = 13$; mithin

$$4c = 4.13 \text{ und } b^2 - 4ac = -139,$$

so dass man, mit y die fragliche Quadratwurzel bezeichnend, $4.13y^2 - 139$ zu einem Quadrat machen muss; es ist $A = 4.13$ und $B = -139$, woraus ersichtlich, dass A durch die Quadratzahl 4 theilbar ist; man lässt die 4 fort und nimmt einfach $A = 13$; aber später versäume man nicht, den gefundenen Werth von y durch 2 zu dividiren (No. 50).

Man setze nun $y = \frac{p}{q}$, und erhält

$$13p^2 - 139q^2 = z^2,$$

oder, weil $139 > 13$, $y = \frac{q}{p}$, um

$$-139p^2 + 13q^2 = z^2$$

zu erhalten, welche Gleichung wir

$$-139p^2 = z^2 - 13q^2.$$

schreiben.

Man setzt (No. 52) $z = nq - 139q_1$, und für n nimmt man eine Zahl, die nicht grösser ist als $\frac{139}{2}$, also < 70, so dass $n^2 - 13$ durch 139 theilbar wird; ich finde $n = 41$, woraus sich $n^2 - 13 = 1668 = 139.12$ ergiebt; macht man nun die Substitution und dividirt alsdann durch -139, so erhält man die Gleichung

$$p^2 = -12q^2 + 2.41qq_1 - 139q_1^2.$$

Da nun -12 kein Quadrat ist, so erfüllt diese Gleichung noch nicht die geforderten Bedingungen; und da $12 < 13$ ist, so multiplicirt man die ganze Gleichung mit -12 und erhält

$$-12p^2 = (-12q + 41q_1)^2 - 13q_1^2,$$

und verlangt nun, dass $13q_1^2 - 12p^2$ ein Quadrat sei, oder, indem man $\frac{q_1}{p} = y$ setzt, dass

$$13y_1^2 - 12$$

auch eins sei.

Man sieht also, dass man nur $y_1 = 1$ zu machen brauchte; da wir aber nur zufällig diesen Werth erhalten, so verfolgen wir die Rechnung nach unserer Methode, bis wir einen Aus-

druck erhalten, der den gewöhnlichen Methoden zugänglich erscheint. Da 12 durch 4 theilbar ist, so lasse ich diesen Factor fort, eingedenk dessen, dass y_1 später mit 2 zu multipliciren ist; ich muss also $13y_1^2 - 3$ in ein Quadrat verwandeln, oder, indem ich $y_1 = \frac{r}{s}$ setze,

$$13r^2 - 3s^2,$$

(wobei noch r und s relativ prime Zahlen sind, so dass der Bruch $\frac{r}{s}$ bereits auf seine kleinsten Ziffern gebracht erscheint, ebenso wie $\frac{p}{q}$); es sei die Wurzel $= z_1$, so kommt:

$$13r^2 = z_1^2 + 3s^2,$$

und wir setzen $z_1 = ms - 13s_1$, wo m eine ganze Zahl ist, nicht grösser als $\frac{13}{2}$, d. h. < 7, und so, dass $m^2 + 3$ durch 13 theilbar sei; ich finde $m = 6$ und deshalb $m^2 + 3 = 39 = 13.3$; substituirt man nun z_1 und dividirt die ganze Gleichung durch 13, so kommt:

$$r^2 = 3s^2 - 2.6ss_1 + 13s_1^2.$$

Da der Coefficient von s^2, 3, weder ein Quadrat ist noch kleiner als der Coefficient von s_1^2, so macht man (No. 54) $s = \mu s_1 + s_2$, und durch Einsetzung desselben wird die transformirte Gleichung:

$$r^2 = 3s_2^2 - 2(6 - 3\mu)s_2 s_1 + (3\mu^2 - 2.6\mu + 13)s_1^2;$$

nun bestimmt man μ so, dass $6 - 3\mu$ nicht grösser als $\frac{3}{2}$ sei; man muss also offenbar $\mu = 2$ setzen und erhält $6 - 3\mu = 0$; und die Gleichung wird nun

$$r^2 = 3s_2^2 + s_1^2,$$

und ist, wie man sieht, in die geforderte Form gebracht, da der Coefficient des Quadrates der einen der beiden unbestimmten Grössen auch ein Quadrat ist.

Um also die einfachste Lösung zu erhalten, macht man $s_2 = 0$, $s_1 = 1$ und $r = 1$; also ist $s = \mu = 2$ und mithin

$y_1 = \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$; da aber y_1 mit 2 multiplicirt werden muss, so kommt $y_1 = 1$; rückwärts weiter gehend, wird $\frac{q_1}{p} = 1$; also $q_1 = p$; also wird die Gleichung

$$-12p^2 = (-12q + 41q_1)^2 - 13q_1^2$$

übergehen in

$$(-12q + 41p)^2 = p^2$$

und

$$-12q + 41p = p, \quad \text{d. h.} \quad 12q = 40p;$$

also ist:

$$y = \frac{q}{p} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3},$$

und weil y durch 2 dividirt werden muss, $y = \frac{5}{3}$; dieses wird die Wurzel der vorgelegten Form $7 + 15x + 13x^2$ sein; setzt man letztere Grösse $= \frac{25}{9}$, so findet man durch Auflösung der Gleichung:

$$26x + 15 = \pm\frac{7}{3},$$

woraus

$$x = -\frac{19}{39} \quad \text{oder} \quad = -\frac{2}{3}.$$

Man hätte auch

$$-12q + 41p = -p$$

nehmen können und erhielte $y = \frac{q}{p} = \frac{21}{6}$, und durch 2 dividirt: $y = \frac{21}{12}$; setzt man

$$7 + 15x + 13x^2 = \left(\frac{21}{12}\right)^2,$$

so kommt:

$$26x + 15 = \pm\frac{9}{2};$$

folglich

$$x = -\frac{21}{52} \quad \text{oder} \quad = -\frac{3}{4}.$$

Wollte man andere Werthe für x haben, so brauchte man nur andere Lösungen der Gleichung

$$r^2 = 3s_2^2 + s_1^2$$

aufzusuchen, und diese ist nach bekannten Methoden lösbar; man kann aber auch, sobald man nur einen Werth von x kennt, alle übrigen genügenden Werthe von x erhalten durch Anwendung der im Kapitel IV von *Euler*s Algebra auseinandergesetzten Methode.

Bemerkung.

57. Angenommen, der Ausdruck $a + bx + cx^2$ werde gleich einem Quadrat g^2, sobald $x = f$ ist, so dass

$$a + bf + cf^2 = g^2,$$

folglich

$$a = g^2 - bf - cf^2;$$

setzt man diesen Werth in den vorgelegten Ausdruck, so kommt:

$$g^2 + b(x - f) + c(x^2 - f^2).$$

Nimmt man nun $g + m(x - f)$ als Wurzel dieses Ausdruckes, wo m eine unbestimmte Grösse ist, so hat man die Gleichung

$$g^2 + b(x-f) + c(x^2-f^2) = g^2 + 2mg(x-f) + m^2(x-f)^2,$$

d. h., wenn man beiderseits g^2 aufhebt und dann durch $x - f$ dividirt:

$$b + c(x + f) = 2mg + m^2(x - f),$$

woraus

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c}.$$

Offenbar muss wegen der Unbestimmtheit von m dieser Ausdruck alle Werthe von x enthalten, die den gegebenen Ausdruck zu einem Quadrat machen; denn welches auch das Quadrat sei, dem dieser Ausdruck gleich sein könnte, stets kann die Wurzel aus dieser Zahl durch $g + m(x - f)$ dargestellt werden, wo m einen passenden Werth erhält. Hat

man also nach der oben dargestellten Methode einen genügenden Werth von x gefunden, so braucht man denselben nur für f zu nehmen und für g die Wurzel aus der sich daraus ergebenden Quadratzahl; die vorstehende Formel wird alle die übrigen möglichen Werthe von x ergeben.

Im vorhergehenden Beispiel ist $y = \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{2}{3}$ gefunden; also wird man $g = \frac{5}{3}$ und $f = -\frac{2}{3}$ setzen und erhält:

$$x = \frac{19 - 10m - 2m^2}{3(m^2 - 13)}:$$

dieses ist der allgemeine Ausdruck für alle rationalen Werthe von x, die den Ausdruck $7 + 15x + 13x^2$ zu einem Quadrat machen.

2. Beispiel.

58. *Es sei ferner ein rationaler Werth von y zu finden, der $23y^2 - 5$ zu einem Quadrat macht.*

Da 23 und 5 durch keine Quadratzahl theilbar sind, ist keine Reduction nöthig. Daher setzen wir $y = \frac{p}{q}$ und verlangen, dass $23p^2 - 5q^2$ gleich einem Quadrat z^2 werde; man erhält also die Gleichung:

$$23p^2 = z^2 + 5q^2.$$

Man setzt also $z - nq - 23q_1$ und nimmt für n eine ganze Zahl nicht grösser als $\frac{23}{2}$, so dass $n^2 + 5$ durch 23 theilbar sei. Ich finde $n = 8$, woraus $n^2 + 5 = 23.3$, und dieser Werth von n ist der einzige, der die verlangte Eigenschaft hat. Substituirt man also $8q - 28q_1$ für z und dividirt die ganze Gleichung durch 23, so kommt:

$$p^2 = 3q^2 - 2.8qq_1 + 23q_1^2,$$

und hier ist der Coefficient 3 bereits kleiner als der Werth von B, welches, abgesehen vom Zeichen, gleich 5 ist.

Man multiplicirt also die ganze Gleichung mit 3, und erhält:

$$3p^2 = (3q - 8q_1)^2 + 5q_1^2;$$

so dass, indem man $\frac{q_1}{p} = y$ setzt, der Ausdruck

$$-5y_1^2 + 3$$

ein Quadrat werden soll, wo die Coefficienten 5 und 3 keinerlei Reduction zulassen.

Es sei nun $y_1 = \frac{r}{s}$ (r und s sind relativ prim, während q_1 und p es nicht zu sein brauchen), alsdann muss $-5r^2 + 3s^2$ ein Quadrat werden; nennt man die Wurzel z_1, so hat man

$$-5r^2 + 3s^2 = z_1^2,$$

und hieraus

$$-5r^2 = z_1^2 - 3s^2.$$

Man nimmt also $z_1 = ms + 5s_1$, und für m eine ganze Zahl, nicht grösser als $\frac{5}{2}$ und so, dass $m^2 - 3$ durch 5 theilbar sei; aber dieses ist unmöglich, denn man könnte nur $m = 1$ oder $m = 2$ setzen, was $m^2 - 3 = -2$ oder $= 1$ ergäbe. Es muss also geschlossen werden, dass die Aufgabe unlösbar sei, d. h. der Ausdruck $23y^2 - 5$ kann niemals ein Quadrat werden, was man auch für y einsetzte.

Zusatz.

59. Hätte man eine beliebige Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten wie

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

und wollte man die rationalen Werthe von x und y finden, die diesem Ausdruck genügen, so könnte man seinen Zweck, wenn die Aufgabe lösbar ist, nach der vorstehenden Methode erreichen.

Drückt man nämlich y durch x aus, so hat man

$$2fy + ex + c = \sqrt{(c + ex)^2 - 4f(a + bx + dx^2)},$$

oder indem man $\alpha = c^2 - 4af$, $\beta = 2ce - 4bf$, $\gamma = e^2 - 4df$, setzt,

$$2fy + ex + c = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2};$$

so dass die Aufgabe darauf reducirt erscheint, Werthe von x zu finden, die den Ausdruck $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ rational machen.

Bemerkung.

60. Wir haben diese Aufgabe in einer etwas anderen Art schon behandelt in den *Abhandlungen der Berliner Akademie* vom Jahre 1767*), und wir glauben zuerst eine directe von allem Herumtasten freie Methode zur Lösung der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades gegeben zu haben. Der sich hierfür interessirende Leser wird jene Abhandlungen zu Rathe ziehen können; er wird dort neue und wichtige Bemerkungen finden zur Aufsuchung der ganzen Zahlen, die für n genommen den Ausdruck $n^2 - B$ durch A theilbar machen, wo A und B gegebene Zahlen sind.

In den Abhandlungen vom Jahre 1770 ff. findet man auch Untersuchungen über die Form der Theiler der durch $z^2 - Bq^2$ dargestellten Zahlen; so dass man aus der Form von A selbst zuweilen die Unmöglichkeit einer Lösung der Gleichungen

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2$$

wo $Ay^2 + B$ ein Quadrat ist, erschliessen kann**) (No. 52).

Legendre hat sich später in der in No. 47 citirten Abhandlung mit den allgemeinen Bedingungen der Lösbarkeit oder Unlösbarkeit der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades beschäftigt und hat folgenden bemerkenswerthen Lehrsatz gefunden:

Die Gleichung $ax^2 + by^2 = cz^2$, in welcher a, b, c positive, relativ prime Zahlen ohne quadratische Factoren sind, ist lösbar, wenn man drei ganze Zahlen λ, μ, ν finden kann, welche die drei Grössen $\frac{a\lambda^2 - b}{c}$, $\frac{c\mu^2 - b}{a}$, $\frac{c\nu^2 - a}{b}$ zu ganzen Zahlen machen.

---

*) Œuvres de Lagrange, t. II, p. 377.
**) Œuvres de Lagrange, t. II, p. 581.

§ VI. Doppelte und dreifache Gleichheiten.

61. Wir wollen hier mit wenig Worten die zwei- und die dreifachen Gleichungen behandeln, die sehr häufig in der Diophantischen Analyse angewandt werden und für deren Lösung dieser grosse Geometer und seine Commentatoren besondere Regeln geben zu müssen glaubten.

Hat man einen Ausdruck mit einer oder mehreren Unbekannten einer ganzen Potenz, einem Quadrat oder Cubus etc. gleich zu machen, so nennt man das in der Analyse des Diophantus eine einfache Gleichheit; und wenn man zwei Ausdrücke, in denen dieselbe oder dieselben Unbekannten vorkommen, einer ganzen Potenz gleich werden lassen soll, so spricht man von einer zweifachen Gleichheit, u. s. f.

Bis jetzt haben wir gesehen, wie man die einfachen Gleichheiten lösen muss, in denen die Unbekannte nicht höher als im zweiten Grade vorkommt, man also nur Quadrate zu bilden hat.

Wollen wir nun zusehen, wie man die zweifachen und dreifachen Gleichheiten derselben Art behandeln muss.

62. Es sei zunächst folgende zweifache Gleichheit vorgelegt

$$a + by = \text{einem Quadrat und } c + dx = \text{einem Quadrat},$$

wo die Unbekannte x nur im ersten Grade vorkommt.

Setzt man

$$a + bx = t^2, \quad c + dx = u^2,$$

und eliminirt x aus beiden Gleichungen, so kommt:

$$ad - bc = dt^2 - bu^2;$$

mithin:

$$dt^2 = bu^2 + ad - bc, \text{ und } (dt)^2 = dbu^2 + (ad - bc)d;$$

so dass die Schwierigkeit darauf zurückgeführt ist, einen rationalen Werth von u zu finden, so dass $dbu^2 + ad^2 - bcd$ ein Quadrat werde. Diese einfache Gleichheit wird man nach der soeben beschriebenen Methode lösen, und, da alsdann u bekannt ist, wird man

$$x = \frac{u^2 - c}{d}$$

setzen.

Wenn die zweifache Gleichheit

$$ax^2 + bx = \text{einem Quadrat}, \quad cx^2 + dx = \text{einem Quadrat}$$

gefordert würde, so brauchte man nur $x = \frac{1}{x_1}$ zu setzen und beide Gleichungen mit x_1^2 zu multipliciren und erhielte folgende zwei neue Gleichheiten:

$$a + bx_1 = \text{einem Quadrat und } e + dx_1 = \text{einem Quadrat},$$

und diese sind den vorigen ähnlich.

Man kann also im Allgemeinen alle zweifachen Gleichheiten lösen, in denen die Unbekannte den ersten Grad nicht übersteigt, sowie diejenigen, wo die Unbekannte in allen Gliedern vorkommt, doch nicht höher als in der zweiten Potenz; anders aber, wenn man Gleichheiten von folgender Form hat:

$$a + bx + cx^2 = \text{einem Quadrat},$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \text{einem Quadrat}.$$

Löst man die erste dieser Gleichheiten nach unserer Methode und nennt f den Werth von x, der $a + bx + cx^2 =$ einem Quadrat macht, so hat man allgemein nach No. 57

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c};$$

und setzt man diesen Werth von x in den anderen Ausdruck $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ ein, und multiplicirt darauf mit $(m^2 - c)^2$, so hat man die Gleichheit

$$\alpha(m^2 - c)^2 + \beta(m^2 - c)(fm^2 - 2gm + b + cf) + \gamma(fm^2 - 2gm + b + cf)^2$$

$=$ einem Quadrat zu lösen, wo die Unbekannte m in der vierten Potenz vorkommt.

Bis jetzt aber hat man keinerlei allgemeine Regel, diese Art von Gleichheiten zu lösen, und man kann nicht mehr thun, als folgweise verschiedene Lösungen finden, sobald man eine kennt (s. Kapitel IX).

63. Wenn die dreifache Gleichheit vorliegt:

$$ax + by = \text{einem Quadrat}, \quad cx + dy = \text{einem Quadrat},$$
$$hx + ky = \text{einem Quadrat},$$

so setze man:

$$ax + by = t^2, \; cx + dy = u^2, \; hx + ky = s^2,$$

eliminirt man x und y aus diesen drei Gleichungen, so kommt:

$$(ak - bh)u^2 - (ck - dh)t^2 = (ad - cb)s^2;$$

so dass, wenn man $\frac{u}{t} = z$ setzt, die Schwierigkeit nur noch darin besteht, die einfache Gleichheit

$$\frac{ak - bh}{ad - cb} z^2 - \frac{ck - dh}{ad - cb} = \text{einem Quadrat}$$

zu lösen, und dieses fällt, wie man sieht, in unsere allgemeine Methode.

Hat man den Werth von z gefunden, so hat man $u = tz$ und die beiden ersten Gleichungen ergeben

$$x = \frac{d - bz^2}{ad - cb} t^2, \; y = \frac{az^2 - c}{ad - cb} t^2.$$

Enthielte aber die dreifache Gleichheit eine einzige Veränderliche, so geriethe man in eine Gleichheit, in der die Unbekannte in der vierten Potenz vorkommt.

Offenbar kann dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt werden, indem man $y = 1$ setzt, so dass man

$$\frac{az^2 - c}{ad - cb} t^2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{az^2 - c}{ad - cb} = \text{einem Quadrat}.$$

erhält. Nennt man nun f einen der Werthe von z, die der vorstehenden Gleichheit genügen, und setzt man zur Abkürzung $\frac{ak - bh}{ad - cb} = e$, so hat man im Allgemeinen (No. 57)

$$z = \frac{fm^2 - 2gm + ef}{m^2 - e}.$$

Substituirt man diesen Werth von z in die letzte Gleichheit und multiplicirt dieselbe durch das Quadrat $m^2 - e$, so erhält man

$$\frac{a(fm^2 - 2gm + ef)^2 - c(m^2 - e)^2}{ad - cb} = \text{einem Quadrat},$$

wo die Unbekannte m, wie ersichtlich, auf den vierten Grad steigt.

§ VII. Directe allgemeine Methode, alle Werthe von y in ganzen Zahlen zu finden, welche Grössen von der Form $\sqrt{Ay^2 + B}$ rational machen, wo A und B gegebene ganze Zahlen sind; sowie alle möglichen Lösungen der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen.

(Zusatz zum VI. Kapitel.)

64. Obwohl die in § V gegebene Methode genügt, um die allgemeinen Formeln aufzustellen, die alle rationalen Werthe von y, die den Ausdruck $Ay^2 + B$ gleich einem Quadrat werden lassen, ergeben, so versagen diese Formeln, wenn man für y ganze Zahlen fordert; deshalb müssen wir hier eine neue Methode entwickeln, um die Aufgabe in ganzen Zahlen zu lösen.

Es sei also

$$Ay^2 + B = x^2;$$

und, da A und B ganze Zahlen sein sollen und auch y eine ganze Zahl, so muss offenbar auch x eine ganze Zahl sein; man hat also in ganzen Zahlen die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B$$

zu lösen.

Ich beginne mit der Bemerkung, dass, wenn B durch keine Quadratzahl theilbar ist, y nothwendig relativ prim zu B sein muss; denn hätten y und B einen gemeinschaftlichen Theiler α, so dass $y = \alpha y_1$, und $B = \alpha B_1$, so wäre

$$x^2 = A\alpha^2 y_1^2 + \alpha B_1,$$

woraus folgt, dass x durch α theilbar sein müsste; da aber α weder ein Quadrat noch durch ein solches theilbar ist (Vor-

aussetzung), weil α Factor von B ist, so muss x durch α theilbar sein; setzt man $x = \alpha x_1$, so kommt

$$\alpha^2 x_1^2 = \alpha^2 A y_1^2 + \alpha B_1,$$

oder, indem man durch α dividirt:

$$\alpha x_1^2 = \alpha A y_1^2 + B_1;$$

woraus folgt, dass auch B_1 durch α theilbar sein müsste, was gegen die Voraussetzung verstösst.

Also nur wenn B quadratische Factoren enthält, kann y mit B einen gemeinsamen Theiler haben; es ist aber aus der vorstehenden Beweisführung leicht ersichtlich, dass dieser gemeinsame Theiler von y und B nur die Wurzel eines der quadratischen Factoren von B sein könnte, und dass x denselben gemeinschaftlichen Factor wird haben müssen; alsdann wäre die ganze Gleichung durch das Quadrat dieses gemeinschaftlichen Theilers von x, y und B theilbar.

Hieraus schliesse ich:

1. dass, wenn B durch kein Quadrat theilbar ist, y und B relativ prim sind;

2. dass, wenn B durch ein einziges Quadrat α^2 theilbar ist, y relativ zu B oder durch α theilbar sein könne, woraus sich zwei gesondert zu untersuchende Fälle ergeben; im ersten Falle wird man die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B$$

lösen, indem man y und B relativ prim voraussetzt; im zweiten wird man

$$x^2 - Ay^2 = B_1$$

lösen, wo $B_1 = \frac{B}{\alpha^2}$, während auch y und B_1 relativ prim sind; dann aber müssen später die für y und x gefundenen Werthe mit α multiplicirt werden, wenn man die der vorgelegten Gleichung genügenden Werthe erhalten will.

3. dass, wenn B durch zwei verschiedene Quadrate α^2 und β^2 theilbar ist, man drei Fälle zu betrachten haben wird: im ersten wird man die Gleichung lösen, indem man y und B als relativ prim ansieht; im zweiten wird man gleichfalls die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B_1,$$

in der $B_1 = \frac{B}{\alpha^2}$, lösen, wenn man y und B_1 als relativ prim voraussetzt, und man wird später die Werthe von x und y mit α multipliciren; im dritten Falle wird man die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B_2,$$

lösen, wo $B_2 = \frac{B}{\beta^2}$, falls y und B_2 relativ prim sind, und man wird später die Werthe von x und y mit β multipliciren.

4. U. s. w.

Man wird also immer soviel verschiedene Gleichungen zu lösen haben, als B quadratische Factoren enthält; aber diese Gleichungen werden alle dieselbe Form haben

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

und y wird auch stets relativ prim zu B sein.

65. Betrachten wir also allgemein die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

wo y und B relativ prim sind; da x und y ganze Zahlen sein sollen, so muss $x^2 - Ay^2$ durch B theilbar sein.

Nach der Methode des § IV (No. 48) setze man $x = ny - Bz$ und man erhält die Gleichung

$$(n^2 - A)y^2 - 2nByz + B^2z^2 = B,$$

aus der ersichtlich, dass das Glied $(n^2 - A)y^2$ durch B theilbar sein muss, da alle anderen Glieder es ohnehin sind; da nun y und B relativ prim sind, so muss $n^2 - A$ durch B theilbar sein; macht man nun $\frac{n^2 - A}{B} = C$, so kommt nach Division durch B:

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1;$$

diese Gleichung ist aber einfacher als die vorgelegte, da das zweite Glied gleich der Einheit ist.

Man wird also die Werthe von n suchen, die $n^2 - A$ durch B theilbar werden lassen; nach No. 47 genügt es für n alle ganzen positiven und negativen Zahlen zu versuchen, die nicht grösser sind als $\frac{B}{2}$, und wenn man unter diesen keine

findet, die genügt, so schliesst man zunächst, dass $n^2 - A$ nicht durch B theilbar sein könne und dass die vorgelegte Gleichung nicht in ganzen Zahlen lösbar sei.

Findet man dagegen auf diesem Wege einen oder mehrere Werthe, die genügen, so nimmt man sie folgweise für n und erhält dadurch eben soviel verschiedene Gleichungen, die man gesondert zu behandeln hat und deren eine jede eine oder mehrere Lösungen der vorliegenden Aufgabe wird geben können.

Von den Werthen, die grösser als $\frac{1}{2}B$ sind, kann man absehen, weil sie keine neuen Gleichungen ergäben, die von denen mit einem n kleiner als $\frac{1}{2}B$ abwichen, wie solches schon in No. 52 erörtert wurde.

Da übrigens die Bedingung, durch welche man n bestimmen muss, darin besteht, dass $n^2 - A$ durch B theilbar sei, so kann offenbar ein jeder Werth von n sowohl positiv als negativ sein; es wird also hinreichen, für n alle ganzen Zahlen, die nicht grösser als $\frac{B}{2}$ sind, anzusetzen und alsdann die genügenden Werthe von n zu nehmen, sowohl mit dem Plus- als mit dem Minus-Zeichen.

Wir haben anderswo Regeln gegeben, um die Aufsuchung der Werthe von n, die der Aufgabe genügen, zu erleichtern, Regeln, welche diese Werthe in einer grossen Zahl von Fällen a priori zu finden gestatten. (Siehe *Berliner Abhandlungen* von 1768, Seite 194 und 274 *).

Auflösung der Gleichung $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ in ganzen Zahlen.

Man kann diese Gleichung nach zwei verschiedenen Methoden, die wir entwickeln wollen, auflösen.

Erste Methode.

66. Da die Grössen C, n, B, sowie die Unbestimmten y und z ganze Zahlen sein sollen, so wird der Ausdruck

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

---

*) Œuvres de Lagrange, t. II, p. 377 und 655.

stets gleich einer ganzen Zahl sein; also wird der kleinste Werth gleich 1 sein, wenn nicht gleich Null, was nur geschehen kann, wenn der vorstehende Ausdruck sich in zwei rationale Factoren zertheilen lässt.

Da aber dieser letzte Fall gar keine Schwierigkeit darbietet, so wollen wir von ihm absehen und es erübrigt nur zu untersuchen, welche Werthe von y und z die fragliche Grösse so klein als möglich ausfallen lassen; ist das Minimum gleich eins, so hat man die Lösung der vorgelegten Gleichung; wenn nicht, so existirt keine Lösung in ganzen Zahlen. Also rückt unsere Aufgabe in die III. Aufgabe des § II und wird ähnlich gelöst. Da nun jetzt (No. 65)

$$(2n)^2 - 4BC = 4A,$$

so müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem A positiv oder negativ ist.

Erster Fall, wenn $n^2 - BC = A < 0$.

67. Nach der Methode in No. 32 muss der Bruch $\frac{n}{C}$, positiv genommen, in einen Kettenbruch entwickelt werden: das geschieht nach den Regeln in No. 4; alsdann bilde man mittelst der Formeln in No. 10 die Reihe der gegen $\frac{n}{C}$ convergirenden Brüche und dann erübrigt nur noch, versuchsweise die Zähler dieser Brüche für y zu setzen und die entsprechenden Nenner für z. Ist die vorgelegte Gleichung lösbar in ganzen Zahlen, so findet man auf die angegebene Weise die genügenden Werthe von y und z; und umgekehrt überzeugt man sich, dass die Aufgabe keine Lösung in ganzen Zahlen zulässt, wenn unter den untersuchten Zahlen sich keine, die da genügt, findet.

Zweiter Fall, wenn $n^2 - BC = A > 0$.

68. Man wird hier die Methode in No. 33 ff. anwenden; weil $E = 4A$, so betrachtet man zunächst die Grösse (No. 39)

$$a = \frac{n \pm \sqrt{A}}{C},$$

wo man sowohl die Zeichen von n, von welchem wir erkannten, dass es ebensowohl positiv als negativ sein könne, als von $\sqrt{A}$ bestimmen muss, so zwar dass dieser Werth positiv wird; alsdann wird man folgende Rechnung ausführen:

$$Q_0 = -n, \qquad P_0 = C, \qquad \mu < \frac{-Q_0 \pm \sqrt{A}}{P_0},$$

$$Q_1 = \mu\, P_0 + Q_0, \quad P_1 = \frac{Q_1^2 - A}{P_0}, \quad \mu_1 < \frac{-Q_1 \mp \sqrt{A}}{P_1},$$

$$Q_2 = \mu_1 P_1 + Q_1, \quad P_2 = \frac{Q_2^2 - A}{P_1}, \quad \mu_2 < \frac{-Q_2 \pm \sqrt{A}}{P_2},$$

$$Q_3 = \mu_2 P_2 + Q_2, \quad P_3 = \frac{Q_3^2 - A}{P_2}, \quad \mu_3 < \frac{-Q_3 \mp \sqrt{A}}{P_3},$$

und man wird diese Reihe nur solange fortsetzen, bis die zwei entsprechenden Glieder der ersten und der zweiten Reihe zusammen wiederkehren. Wenn alsdann unter den Gliedern der zweiten Reihe P_0, P_1, $P_2, \ldots$ eines gleich $+1$ vorkommt, so giebt dieses Glied eine Lösung der vorgelegten Gleichung und die Werthe von y und z werden die entsprechenden Werthe der beiden Reihen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ und $q_0, q_1, q_2, \ldots$ sein, wie solche nach den Formeln in No. 25 berechnet werden; andernfalls schliesst man sofort, dass die vorgelegte Gleichung in ganzen Zahlen nicht lösbar sei (siehe Beispiel in No. 40).

Dritter Fall, wenn A = einem Quadrat.

69. In diesem Falle wird $\sqrt{A}$ rational, und die Grösse

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

kann in zwei rationale Factoren zertheilt werden. In der That ist diese Grösse dasselbe wie

$$\frac{(Cy - nz)^2 - Az^2}{C},$$

und dieses kann, wenn $A = a^2$ gesetzt wird, unter die Form

$$\frac{[Cy-(n+a)z][(Cy-(n-a)z]}{C}.$$

gebracht werden.

Da nun aber $n^2-a^2=BC=(n+a)(n-a)$, so muss das Product $(n+a)(n-a)$ durch C theilbar sein, mithin muss die eine der beiden Zahlen $n+a$ und $n-a$ durch einen der Factoren von C theilbar sein und der andere durch den reciproken Factor. Es sei also $C=bc$, ferner $n+a=fb$ und $n-a=gc$, wo f und g ganze Zahlen sind; jetzt wird der fragliche Ausdruck das Product der beiden linearen Factoren $cy-fz$ und $by-gz$ sein; da aber diese beiden Factoren ganze Zahlen sind, so kann ihr Product nicht gleich 1 sein, wie die vorgelegte Gleichung verlangt, es sei denn, dass ein jeder von ihnen besonders $=\pm 1$ sei. Man setze also $cy-fz=\pm 1$, $by-gz=\pm 1$, und bestimme hieraus y und z; sobald die gefundenen Werthe ganze Zahlen sind, hat man die Lösung, anderenfalls ist die Aufgabe in ganzen Zahlen nicht lösbar.

Zweite Methode.

70. Man nehme mit dem Ausdruck

$$Cy^2-2nyz+Bz^2$$

Transformationen vor, wie wir sie oben (No. 54) angewandt haben, so kann man, wie ich behaupte, stets zu einem transformirten Ausdruck von der Form

$$L\xi^2-2N\xi\psi+M\psi^2$$

gelangen, wo L, M, N ganze Zahlen sind, die von den gegebenen C, B, n so abhängen, dass

$$N^2-LM=n^2-CB=A,$$

und so, dass abgesehen vom Zeichen, $2N$ nicht grösser sei als L und auch nicht grösser als M; die Zahlen ξ und ψ werden auch ganze Zahlen sein, die aber von den unbestimmten Zahlen y und z abhängen.

Es sei z. B. $C<B$ und man bringe die fragliche Form auf

$$B_1y^2-2nyy_1+By_1^2,$$

indem man $C = B_1$ und $z = y_1$ setzt; wenn $2n$ nicht grösser als B_1 ist, so hat der vorliegende Ausdruck bereits die geforderten Eigenschaften; wenn aber $2n > B_1$ ist, so setze man $y = my_1 + y_2$ und nach Einsetzung dieses Werthes erhält man die transformirte Form

$$B_1 y_2^2 - 2n_1 y_2 y_1 + B_2 y_1^2,$$

wo

$$n_1 = n - mB_1,$$

$$B_2 = m^2 B_1 - 2mn + B = \frac{n_1^2 - A}{B_1}.$$

Da m unbestimmt ist, so kann man dafür eine solche ganze Zahl setzen, dass $n - mB_1$ nicht grösser wird als $\frac{1}{2} B_1$; alsdann wird $2n_1$ nicht grösser als B_1 sein. Wenn also $2n_1$ nicht grösser als B_2 ist, so wird die vorstehende transformirte Form schon den verlangten Fall darstellen; wenn aber $2n_1$ grösser als B_2 ist, so setze man wiederum $y_1 = m_1 y_2 + y_3$, und dieses ergiebt den neuen transformirten Ausdruck

$$B_3 y_2^2 - 2n_2 y_2 y_3 + B_2 y_3^2,$$

wo

$$n_2 = n_1 - m_1 B_2,$$

$$B_3 = m_1^2 B_2 - 2m_1 n_1 + B_1 = \frac{n_2^2 - A}{B_2}.$$

Man wird die unbestimmte Zahl m_1 so bestimmen, dass $n_1 - m_1 B_2$ nicht grösser sei als $\frac{B_2}{2}$, und folglich $2n_2$ nicht B_2 übertrifft; so dass man die transformirte Form haben wird, wenn auch $2n_2$ nicht mehr grösser ist als B_3; wenn aber $2n_2$ grösser ist als B_3, so wird man wieder $y_2 = m_2 y_3 + y_4$ setzen u. s. w. —

Offenbar können diese Operationen sich nicht bis ins Unendliche fortsetzen; denn weil $2n$ grösser ist als B_1, $2n_1$ aber nicht, so ist n_1 kleiner als n; ebenso ist $2n_1 > B_2$, aber $2n_2$ ist es nicht; also ist $n_2 < n_1$ und ebenso weiter, so dass die Zahlen n, n_1, n_2, ... eine abnehmende Reihe

$> \frac{3}{4} LM$; und da $M < L$ vorausgesetzt ist, oder wenigstens nicht $> L$, so hat man um so mehr $a =$ oder $> \frac{3}{4} M^2$; also ist $M =$ oder $< \sqrt{\frac{4a}{3}}$; folglich $M < \frac{4}{3} \sqrt{a}$.

Man ersieht also, dass die Gleichung

$$v^2 + a\xi^2 = M$$

nicht bestehen kann in der Voraussetzung, dass v und ξ ganze Zahlen seien, ausser man mache $\xi = 0$ und $v^2 = M$, was erfordert, dass M eine Quadratzahl sei.

Angenommen also, es sei $M = \mu^2$, so erhält man $\xi = 0$, $v = \pm \mu$; also weil

$$v = M\psi - N\xi,$$

so kommt

$$\mu^2 \psi = \pm \mu, \text{ und folglich } \psi = \pm \frac{1}{\mu};$$

so dass ψ keine ganze Zahl sein kann, wie doch solches nach der Voraussetzung verlangt wird, es sei denn, dass $\mu = \pm 1$ sei und mithin $M = 1$.

Hieraus ziehe ich den Schluss, dass die vorgelegte Gleichung in ganzen Zahlen nur dann lösbar sein wird, wenn M gleich der positiven Einheit ist. Findet solches statt, so mache man $\xi = 0$, $\psi = \pm 1$, und man wird von diesen Werthen zu denen von y und z zurückkehren.

Diese Methode kommt im Grunde auf die der No. 67 heraus, aber sie bietet den Vortheil dar, dass alles Herumtasten vermieden ist.

2. Es sei nun A eine positive Zahl; so hat man $A = N^2 - LM$; da nun N^2 nicht grösser sein kann als $\frac{LM}{4}$, so kann die Gleichung offenbar nur dann bestehen, wenn $-LM$ positiv ist, d. h. wenn L und M verschiedene Zeichen haben. Also wird nothwendig $A > -LM$ oder höchstens $= -LM$ sein, wenn $N = 0$ ist, so dass man $-LM =$ oder $< A$ hat und mithin $M^2 =$ oder $< A$ oder $M =$ oder $< \sqrt{A}$.

Der Fall $M = \sqrt{A}$ kann nur dann statthaben, wenn A

ein Quadrat ist; also ist dieser Fall sehr leicht mittelst der oben in No. 69 gegebenen Methode zu lösen.

Es erübrigt noch der Fall, in dem A kein Quadrat und in dem man nothwendigerweise $M < \sqrt{A}$ hat (abgesehen vom Zeichen); alsdann wird die Gleichung

$$v^2 - A\xi^2 = M$$

den Fall des in No. 38 behandelten Theorems darstellen und sie wird nach den dort entwickelten Methoden aufzulösen sein.

Man braucht also nur die folgende Rechnung auszuführen:

$$Q_0 = 0, \qquad P_0 = 1, \qquad \mu < \sqrt{A},$$

$$Q_1 = \mu, \qquad P_1 = Q_1^2 - A, \quad \mu_1 < \frac{-Q_1 - \sqrt{A}}{P_1},$$

$$Q_2 = \mu_1 P_1 + Q_1, \quad P_2 = \frac{Q_2^2 - A}{P_1}, \quad \mu_2 < \frac{-Q_2 + \sqrt{A}}{P_2},$$

$$Q_3 = \mu_2 P_2 + Q_2, \quad P_3 = \frac{Q_3^2 - A}{P_2}, \quad \mu_3 < \frac{-Q_3 - \sqrt{A}}{P_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

die man solange fortsetzen wird, bis zwei entsprechende Glieder der ersten und der zweiten Reihe wieder zusammen erscheinen, oder bis in der Reihe $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ein Glied gleich $+1$ wird, d. h. gleich P_0; denn alsdann werden alle folgenden Glieder in einer jeden der drei Reihen (No. 37) wieder auftreten. Wenn in der Reihe $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ein Glied gleich M sich findet, so hat man die Lösung der vorgelegten Gleichung; denn man braucht nur für v und ξ die entsprechenden Glieder der Reihen $p_1, p_2, p_3, \ldots, q_1, q_2, q_3, \ldots$ zu nehmen, die nach den Formeln in No. 25 berechnet sind; man wird selbst unendlich viele genügende Werthe für v und ξ finden, wenn man dieselben Reihen bis ins Unendliche fortsetzt.

Sobald man zwei Werthe von v und ξ hat, so erhält man durch die Gleichung

$$v = M\psi - N\xi,$$

den Werth von ψ, der auch stets eine ganze Zahl sein wird; alsdann wird man von diesen Werthen von ξ und ψ aufsteigen

können, d. h. von $\Theta_{\varrho+1}$ und Θ_ϱ zu denen von Θ und Θ_1 oder zu denen von y und z (No. 70).

Wenn aber in der Reihe $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sich kein Glied gleich M findet, so kann man dreist schliessen, dass die vorgelegte Gleichung keine Lösung in ganzen Zahlen zulässt.

Man bemerke wohl, dass, da die Reihe $P_0, P_1, P_2, \ldots$ und ebenso die beiden anderen $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ nur von der Zahl A abhängen, die Rechnung für einen gegebenen Werth von A, für alle Gleichungen dienlich sein wird, für die A, d. h. $n^2 - CB$ denselben Werth hat; und in dieser Hinsicht übertrifft die vorstehende Methode die der No. 68, da letztere eine neue Rechnung für jede neue Gleichung erfordert.

Solange übrigens A nicht grösser ist als 100, kann man von der in No. 41 gegebenen Tabelle Gebrauch machen; dieselbe enthält für jede $\sqrt{A}$ die Werthe der beiden Reihen $P_0, -P_1, P_2, -P_3, \ldots$ und $\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ fortgesetzt, bis eines der Glieder $P_1, P_2, P_3, \ldots = 1$ wird, wonach alle folgenden Glieder beider Reihen in derselben Ordnung wiederkehren; so dass man mit Hülfe dieser Tabelle sofort die Lösbarkeit der Gleichung

$$v^2 - A\xi^2 = M$$

beurtheilen kann.

Ueber die Art, alle möglichen Lösungen der Gleichung $$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$ *zu finden, wenn man nur eine einzige kennt.*

72. Obwohl man mit Hülfe der mitgetheilten Methoden folgweise alle Lösungen dieser Gleichung finden kann, wenn sie in ganzen Zahlen lösbar ist, so kann man doch noch auf einfachere Weise in folgender Art zum Ziel gelangen.

Es seien p und q die bereits gefundenen Werthe von y und z, so dass

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1,$$

ferner seien r und s zwei andere ganze Zahlen, jedoch so, dass $ps - qr = 1$ (was immer möglich ist, weil p und q zu einander relativ prim sind); es sei ferner

$$y = pt + ru, \quad z = qt + su,$$

wo t und u zwei neue Unbestimmte sind; setzt man diese Ausdrücke in

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$

ein, und macht zur Abkürzung

$$P = Cp^2 - 2npq + Bq^2,$$
$$Q = Cpr - n(ps + qr) + Bqs,$$
$$R = Cr^2 - 2nrs + Bs^2,$$

so erhält man die transformirte Gleichung

$$Pt^2 + 2Qtu + Ru^2 = 1.$$

Nach der Voraussetzung ist $P = 1$; ferner, wenn ϱ und σ zwei Werthe von r und s sind, die der Gleichung $ps - qr = 1$ genügen, so hat man im Allgemeinen nach No. 42:

$$r = \varrho + mp, \quad s = \sigma + mq,$$

wo m irgend eine ganze Zahl bedeutet; setzt man diese Werthe in den Ausdruck für Q, so kommt:

$$Q = Cp\varrho - n(p\sigma + q\varrho) + Bq\sigma + mP;$$

so dass man, da $P = 1$ ist, $Q = 0$ werden lassen kann, indem man

$$m = -Cp\varrho + n(p\sigma + q\varrho) - Bq\sigma$$

nimmt.

Jetzt bemerke ich, dass der Werth von $Q^2 - PR$ sich nach allen Reductionen und Substitutionen auf

$$(n^2 - CB)(ps - qr)^2$$

reducirt; also erhält man, da $ps - qr = 1$,

$$Q^2 - PR = n^2 - CB = A;$$

mithin, indem man $P = 1$, $Q = 0$ macht, $-R = A$, also $R = -A$; die transformirte Gleichung geht also über in:

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

da aber y, z, p, q, r und s nach der Voraussetzung ganze Zahlen sind, so leuchtet ein, dass auch t und u ganze Zahlen sein werden; denn nimmt man ihre Werthe aus den Gleichungen

$$y = pt + ru, \quad z = qt + su,$$

so erhält man

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps},$$

d. h. weil $ps - qr = 1$,

$$t = sy - rz, \quad u = pz - qy.$$

Man braucht also nur in ganzen Zahlen die Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

zu lösen und jeder Werth von t und u wird neue Werthe von y und z liefern.

In der That, substituirt man in die allgemeinen Werthe von r und s den oben gefundenen Werth von m, so erhält man:

$$r = \varrho(1 - Cp^2) - Bpq\sigma + np(p\sigma + q\varrho),$$
$$s = \sigma(1 - Bq^2) - Cpq\varrho + nq(p\sigma + q\varrho),$$

oder weil $Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1$,

$$r = (Bq - np)(q\varrho - p\sigma) = - Bq + np,$$
$$s = (Cp - nq)(p\sigma - q\varrho) = \quad Cp - nq.$$

Also kommt allgemein, wenn man diese Werthe von r und s in die obenstehenden Ausdrücke für y und z einsetzt:

$$y = pt - (Bq - np)u,$$
$$z = qt + (Cp - nq)u.$$

73. Alles kommt also darauf hinaus, die Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

zu lösen.

1. Ist A negativ, so kann die Gleichung nicht in ganzen Zahlen bestehen, ausser wenn $u = 0$ und $t = 1$ ist, was $y = p$ und $z = q$ ergäbe; hieraus kann man folgern, dass, wenn A negativ ist, die vorgelegte Gleichung

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$

immer nur eine einzige Lösung in ganzen Zahlen zulasse.

Dasselbe fände statt, wenn A eine positive Quadratzahl wäre; denn wenn $A = a^2$ gesetzt wird, so hätte man

$$(t + au)(t - au) = 1;$$

mithin

$$t + au = \pm 1, \quad \text{und} \quad t - au = \pm 1,$$

also $2au = 0$; folglich $u = 0$, also

$$t = \pm 1.$$

2. Wenn aber A positiv und keine Quadratzahl ist, so giebt es für die Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

stets eine unendliche Anzahl von Lösungen in ganzen Zahlen (No. 37), die alle mittelst der oben (No. 71, 2.) gegebenen Formeln gefunden werden können; indess genügt es, die kleinsten Werthe von t und u zu finden, und sobald man in der Reihe $P_1, P_2, P_3, \ldots$ zu einem Gliede gleich 1 gekommen ist, so braucht man nur nach den Formeln in No. 25 die entsprechenden Glieder der beiden Reihen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ und $q_1, q_2, q_3, \ldots$ zu berechnen. Das werden die gesuchten Werthe von t und u sein; hieraus erhellt, dass ebendieselbe Rechnung, die zur Lösung der Gleichung

$$v^2 - A\xi^2 = M$$

angestellt wurde, auch bei der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

zum Ziele führen wird.

Solange übrigens A den Werth 100 nicht übersteigt, hat man alle kleinsten Werthe von t und u in der am Schluss

des VII. Kapitels gegebenen Tabelle*), in welcher die dort mit a, m, n bezeichneten Zahlen sich mit denen decken, die wir hier A, t und u nennen.

74. Es seien t_1 und u_1 die kleinsten Werthe von t und u in der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

und so wie diese Werthe dazu dienen können, neue Werthe von y und z in der Gleichung

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$$

zu finden, so können sie auch dazu verwandt werden, neue Werthe von t und u in der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

zu bestimmen, denn letztere Gleichung ist nur ein Specialfall der ersteren. Daher braucht man nur $C = 1$ und $n = 0$ anzunehmen, woraus $-B = A$, und alsdann t und u an Stelle von y, z und t_1, u_1 an Stelle von p, q zu schreiben. Setzt man dieses in die allgemeinen Ausdrücke der No. 72 ein und schreibt T, U statt t und u, so kommt im Allgemeinen:

$$t = Tt_1 + AUu_1,$$
$$u = Tu_1 + Ut_1,$$

und zur Bestimmung von T und U die Gleichung

$$T^2 - AU^2 = 1,$$

die der vorgelegten ähnlich ist.

---

*) Hier folgen noch einige Beispiele für $a > 100$:

Wenn $a = 103$, so kommt $\begin{cases} n = 22419, \\ m = 227528; \end{cases}$

Wenn $a = 113$, so kommt $\begin{cases} n = 113296, \\ m = 1204353; \end{cases}$

Wenn $a = 109$, so kommt $\begin{cases} n = 15140424455100, \\ m = 158070671986249; \end{cases}$

Wenn $a = 157$, so kommt $\begin{cases} n = 3726964292220, \\ m = 46698728731849; \end{cases}$

Man kann also $T = t_1$ und $U = u_1$ voraussetzen und erhält

$$t = t_1^2 + Au_1^2, \quad u = t_1 u_1 + t_1 u_1.$$

Nennt man t_2, u_2 die zweiten Werthe von t und u, so kommt:

$$t_2 = t_1^2 + Au_1^2, \; u_2 = 2\,t_1 u_1.$$

Nun kann man offenbar diese neuen Werthe t_2, u_2 statt der ersteren t_1, u_1 nehmen; so erhält man

$$t = Tt_2 + AUu_2,$$
$$u = Tu_2 + Ut_2,$$

wo man wiederum $T = t_1$, $U = u_1$ annehmen kann, woraus

$$t = t_1 t_2 + Au_1 u_2, \; u = t_1 u_2 + u_1 t_2.$$

So erhält man neue Werthe von t und u und zwar

$$t_3 = t_1 t_2 + Au_1 u_2 = t_1(t_1^2 + 3\,Au_1^2),$$
$$u_3 = t_1 u_2 + u_1 t_2 = u_1(3\,t_1^2 + Au_1^2),$$

u. s. w.

75. Die vorstehende Methode lässt nur folgweise die Werthe t_2, t_3, ... u_2, u_3, ... finden. Wir wollen nun untersuchen, wie man diese Untersuchung verallgemeinern kann. Man hat zunächst

$$t = Tt_1 + AUu_1, \quad u = Tu_1 + Ut_1,$$

woraus ich folgende Combination erhalte:

$$t \pm u\sqrt{A} = (t_1 \pm u_1\sqrt{A})(T \pm U\sqrt{A});$$

wenn nun $T = t_1$ und $U = u_1$ angenommen wird, so kommt:

$$t_2 \pm u_2\sqrt{A} = (t_1 \pm u_1\sqrt{A})^2.$$

Nun setze man diese Werthe von t_2 und u_2 statt t_1 und u_1 ein und man erhält

$$t \pm u\sqrt{A} = (t_1 \pm u_1\sqrt{A})^2 (T \pm U\sqrt{A}),$$

oder, indem man wieder $T = t_1$ und $U = u_1$ setzt und t_3, u_3

die daraus resultirenden Werthe von t und u nennt,

$$t_3 \pm u_3 \sqrt{A} = (t_1 \pm u_1 \sqrt{A})^3.$$

Ebenso findet man

$$t_4 \pm u_4 \sqrt{A} = (t_1 \pm u_1 \sqrt{A})^4,$$

u. s. w.

Wenn man also zur Vereinfachung jetzt T und U die ersten und kleinsten Werthe von t, u nennt, die vorhin t_1, u_1 hiessen, so kommt allgemein:

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm U\sqrt{A})^m,$$

wo m irgend eine ganze positive Zahl bedeutet; wegen der Doppelzeichen schliesst man daraus:

$$t = \frac{(T + U\sqrt{A})^m + (T - U\sqrt{A})^m}{2},$$

$$u = \frac{(T + U\sqrt{A})^m - (T - U\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Obwohl diese Ausdrücke in irrationaler Form erscheinen, so erkennt man doch leicht, dass sie rational werden, sobald man die Potenzen von $T \pm U\sqrt{A}$ entwickelt; denn es ist:

$$(T \pm U\sqrt{A})^m = T^m \pm m T^{m-1} U\sqrt{A} + \frac{m(m-1)}{2} T^{m-2} U^2 A$$
$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} T^{m-3} U^3 A\sqrt{A} + \ldots$$

folglich

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{2} A T^{m-2} U^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} A^2 T^{m-4} U^4 + \ldots,$$

$$u = m T^{m-1} U + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} A T^{m-3} U^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} A^2 T^{m-5} U^5 + \ldots,$$

wo man für m irgend welche positiven Zahlen nehmen kann.

Macht man folgweise $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ so erhält man offenbar wachsende Werthe von t und u.

Jetzt will ich beweisen, dass man auf solche Weise alle überhaupt möglichen Werthe von t und u erhält, wenn T und U die kleinstmöglichen sind. Dazu genügt es zu erkennen, dass zwischen den einem bestimmten m und dem darauf folgenden $m + 1$ liegenden Werthen von t und u keine Zwischenwerthe liegen können, die der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

genügen.

Nehmen wir z. B. die Werthe t_3, u_3, die aus $m = 3$, und die Werthe t_4, u_4, die aus $m = 4$ resultiren, und nehmen an, es gäbe noch Zwischenwerthe θ und v, die gleichfalls der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

genügten.

Da nun

$$t_3^2 - Au_3^2 = 1, \quad t_4^2 - Au_4^2 = 1, \quad \theta^2 - Av^2 = 1,$$

so folgt

$$\theta^2 - t_3^2 = A(v^2 - u_3^2), \quad \text{und} \quad t_4^2 - \theta^2 = A(u_4^2 - v^2);$$

woraus ersichtlich, dass, wenn $\theta > t_3$ und $< t_4$, auch $v > u_3$ und $< u_4$. Ausserdem aber hat man noch folgende andere Werthe von t und u.

$$t = \theta t_4 - Avu_4, \quad u = \theta u_4 - vt_4,$$

die derselben Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

genügen; denn substituirt man dieselben, so erhält man:

$$(\theta t_4 - Avu_4)^2 - A(vt_4 - \theta u_4)^2 = (\theta^2 - Av^2)(t_4^2 - Au_4^2) = 1,$$

eine identische Relation, weil nach der Voraussetzung:

$$\theta^2 - Av^2 = 1, \quad t_4^2 - Au_4^2 = 1.$$

Diese beiden letzten Gleichungen aber geben:

$$\theta - v\sqrt{A} = \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}, \quad t_4 - u_4\sqrt{A} = \frac{1}{t_4 + u_4\sqrt{A}};$$

folglich, wenn man in den Ausdruck in $u = \theta u_4 - v t_4$ statt θ: $v\sqrt{A} + \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}$ einsetzt und statt t_4: $u_4\sqrt{A} + \frac{1}{t_4 + u_4\sqrt{A}}$, so kommt:

$$u = \frac{u_4}{\theta + v\sqrt{A}} - \frac{v}{t_4 + u_4\sqrt{A}};$$

ebenso, wenn man die Grösse $t_3 u_4 - u_3 t_4$ betrachtet, so kann sie, weil $t_3^2 - A u_3^2 = 1$, in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{u_4}{t_3 + u_3\sqrt{A}} - \frac{u_3}{t_4 + u_4\sqrt{A}}.$$

Aber es ist leicht ersichtlich, dass die erstgenannte Grösse kleiner als diese letzte sein muss, weil $\theta > t_3$ und $v > u_3$; also hätte man einen Werth von u, der kleiner wäre als $t_3 u_4 - u_3 t_4$; aber dieses letztere ist gleich U; denn

$$t_3 = \frac{(T + U\sqrt{A})^3 + (T - U\sqrt{A})^3}{2},$$

$$t_4 = \frac{(T + U\sqrt{A})^4 + (T - U\sqrt{A})^4}{2},$$

$$u_3 = \frac{(T + U\sqrt{A})^3 - (T - U\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}},$$

$$u_4 = \frac{(T + U\sqrt{A})^4 - (T - U\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}},$$

woraus

$$t_3 u_4 - t_4 u_3 = \frac{(T - U\sqrt{A})^3 (T + U\sqrt{A})^4 - (T - U\sqrt{A})^4 (T + U\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}};$$

ferner:

$$(T - U\sqrt{A})^3 (T + U\sqrt{A})^3 = (T^2 - A U^2)^3 = 1,$$

weil $T^2 - AU^2 = 1$ nach der Voraussetzung; folglich ist

$$(T - U\sqrt{A})^3 (T + U\sqrt{A})^4 = T + U\sqrt{A},$$
$$(T - U\sqrt{A})^4 (T + U\sqrt{A})^3 = T - U\sqrt{A},$$

so dass der Werth von $t_3 u_4 - u_3 t_4$ sich auf

$$\frac{2U\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} = U$$

reducirt.

Es würde also folgen, dass man einen Werth von u hätte $< U$, und das widerspricht der Voraussetzung, U sei der kleinstmögliche Werth von u; also giebt es zwischen t_3, u_3, und t_4, u_4, keine Werthe. Da diese Ueberlegung allgemein für alle Werthe von t und u, die aus obigen Formeln erhalten werden, angewandt werden kann, indem man m beliebig annimmt, so kann man schliessen, dass diese Formeln wirklich alle möglichen Werthe von t und u enthalten.

Zum Ueberfluss bemerken wir noch, dass die Werthe von t und u ebensowohl positiv, als negativ sein können; denn das erkennt man sofort aus der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Ueber die Art, wie man alle möglichen Lösungen der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen findet.

76. Die bisher entwickelten Methoden genügen zur Auflösung der Gleichungen von der Form

$$Ay^2 + B = x^2;$$

aber man könnte Gleichungen zweiten Grades von complicirterer Form zu lösen haben; deshalb wollen wir zeigen, wie man solche anfassen muss.

Es sei eine Gleichung von der Form

$$ar^2 + brs + cs^2 + dr + es + f = 0$$

vorgelegt, wo a, b, c, d, e, f gegebene ganze Zahlen seien und wo r und s zwei gleichfalls ganzzahlige Unbekannte seien.

Durch die gewöhnliche Lösung erhalte ich zunächst

$$2ar + bs + d = \sqrt{(bs+d)^2 - 4a(cs^2 + es + f)};$$

woraus erhellt, dass die Schwierigkeit sich darauf beschränkt, den Ausdruck

$$(bs+d)^2 - 4a(cs^2 + es + f)$$

zu einem Quadrat zu machen.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, es sei

$$b^2 - 4ac = A, \quad bd - 2ae = g, \quad d^2 - 4af = h,$$

so muss nunmehr $As^2 + 2gs + h$ ein Quadrat werden; dieses sei $= y^2$, so dass man die Gleichung

$$As^2 + 2gs + h = y^2$$

habe, aus welcher der Werth von s erhalten wird, so dass

$$As + g = \sqrt{Ay^2 + g^2 - Ah};$$

man hat also nur noch

$$Ay^2 + g^2 - Ah$$

in ein Quadrat zu verwandeln.

Macht man nun noch

$$g^2 - Ah = B,$$

so muss der Ausdruck

$$\sqrt{Ay^2 + B}$$

rational werden; dieses erreicht man mit Hülfe der mitgetheilten Methoden.

Es sei $\sqrt{Ay^2 + B} = x$, so ist die zu lösende Gleichung

$$Ay^2 + B = x^2;$$

man hat also

$$As + g = \pm x;$$

im Uebrigen hat man schon

$$2ar + bs + d = \pm y.$$

Sobald man also die Werthe von x und y gefunden haben wird, hat man auch die von r und s durch die beiden Gleichungen

$$s = \frac{\pm x - g}{A}, \quad r = \frac{\pm y - d - bs}{2a}.$$

Da nun r und s ganze Zahlen sein sollen, müssen offenbar 1. x und y auch ganze Zahlen sein; 2. muss $\pm x - g$ durch A, und sodann auch $\pm y - d - bs$ durch $2a$ theilbar sein. Nachdem alle möglichen ganzzahligen Werthe von x und y gefunden sein werden, erübrigt nur noch unter diesen diejenigen zu finden, die r und s zu ganzen Zahlen machen.

Wenn A eine negative Zahl oder eine positive Quadratzahl ist, so ist, wie wir gefunden haben, die Anzahl von ganzzahligen Lösungen stets eine begrenzte, so dass man in diesem Falle nur folgweise für x und y die gefundenen Werthe zu versuchen hat; und findet man keine, die für r und s ganze Zahlen ergeben, so wird man schliessen, dass die vorliegende Gleichung keine Lösung der verlangten Form zulässt.

Die Schwierigkeit beschränkt sich also auf den Fall, wo A eine positive, nicht quadratische Zahl ist, ein Fall, in dem, wie man gesehen hat, die Anzahl von möglichen ganzzahligen Lösungen unendlich gross sein kann; da man alsdann eine unendliche Anzahl von Werthen zu versuchen hätte, so gäbe es niemals die Möglichkeit, die Lösbarkeit der vorgelegten Gleichungen sicher zu beurtheilen, es sei denn, man habe eine Regel, um das Herumtasten in gewisse Schranken einzuschliessen; solches wollen wir jetzt untersuchen.

77. Da man nach No. 65 hat

$$x = ny - Bz,$$

und nach No. 72:

$$y = pt - (Bq - np)u,$$
$$z = qt - (Cp - nq)u,$$

so ist leicht ersichtlich, dass die allgemeinen Ausdrücke für r und s folgende Form haben werden:

$$r = \frac{\alpha t + \beta u + \gamma}{\delta}, \quad s = \frac{\alpha_1 t + \beta_1 u + \gamma_1}{\delta_1},$$

wo α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1, δ_1 gegebene ganze Zahlen sind und t und u durch die Formel in No. 75 gegebene Grössen, in welchen der Exponent m irgend eine positive ganze Zahl sein kann. Also kommt die Aufgabe darauf hinaus, anzugeben, welchen Werth man m geben müsse, damit r und s ganze Zahlen werden.

78. Ich bemerke zunächst, dass es stets möglich ist, einen Werth von u zu finden, der durch irgend eine gegebene Zahl Δ theilbar ist; denn sei $u = \Delta\omega$, so wird die Gleichung

$$t^2 - Au^2 = 1$$

übergehen in:

$$t^2 - A\Delta^2\omega^2 = 1,$$

und diese ist stets in ganzen Zahlen lösbar; man wird die kleinsten Werthe von t und ω finden, indem man die Rechnung wie vorhin anstellt, mit dem Unterschiede, dass man $A\Delta^2$ anstatt A nimmt. Da aber diese Werthe auch der Gleichung $t^2 - Au^2 = 1$ genügen, so werden sie offenbar in den Formeln der No. 75 eingeschlossen sein. Also wird es nothwendig einen Werth von m geben, der den Ausdruck für u durch Δ theilbar macht.

Diesen Werth von m bezeichne man mit μ, so behaupte ich, dass, wenn man in den allgemeinen Ausdrücken der No. 75 $m = 2\mu$ macht, der Werth von u durch Δ theilbar sein wird, und dividirt man den Werth von t durch Δ, so wird man den Rest 1 erhalten.

Denn, es seien T_1 und U_1 diejenigen Werthe von t und u, wo $m = \mu$, und T_2 und U_2 diejenigen, wo $m = 2\mu$ ist, so hat man nach No. 75:

$$T_1 \pm U_1\sqrt{A} = (T \pm U\sqrt{A})^\mu,$$
$$T_2 \pm U_2\sqrt{A} = (T \pm U\sqrt{A})^{2\mu};$$

folglich

$$(T_1 \pm U_1\sqrt{A})^2 = T_2 \pm U_2\sqrt{A},$$

vergleicht man also den rationalen Theil des ersten Gliedes mit dem rationalen Theil des zweiten, und den irrationalen Theil mit dem irrationalen, so folgt:

$$T_2 = T_1^2 + AU_1^2, \quad U_2 = 2T_1U_1;$$

also, da U_1 durch Δ theilbar ist, wird U_2 es auch sein und T_2 lässt denselben Rest, wie T_1^2; nun ist nach der Voraussetzung $T_1^2 - AU_1^2 = 1$; folglich muss $T_1^2 - 1$ durch Δ und selbst durch Δ^2 theilbar sein, da schon U_1^2 es ist; folglich werden T_1^2 und mithin auch T_2, durch Δ dividirt, den Rest 1 geben.

Nunmehr behaupte ich, dass die irgend einem m entsprechenden Werthe von t und u, durch Δ dividirt, dieselben Reste ergeben werden, wie die dem Exponenten $m + 2\mu$ entsprechenden Werthe von t und u; denn es seien die letzteren θ und v, so hat man:

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm U\sqrt{A})^m,$$

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (T \pm U\sqrt{A})^{m+2\mu};$$

mithin:

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T \pm U\sqrt{A})^{2\mu};$$

Wir haben aber soeben gefunden, dass

$$T_2 \pm U_2\sqrt{A} = (T \pm U\sqrt{A})^{2\mu};$$

folglich hat man:

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T_2 \pm U_2\sqrt{A}),$$

woraus folgt, dass, wenn man die Multiplication ausführt und je die rationalen und irrationalen Theile mit einander vergleicht,

$$\theta = tT_2 + AuU_2, \quad v = tU_2 + uT_2.$$

Nun ist U_2 durch Δ theilbar und T_2 lässt den Rest 1; folglich wird auch θ denselben Rest lassen, wie t, und v denselben wie u.

Im Allgemeinen werden also die Reste der Werthe von t und u, die den Exponenten $m + 2\mu$, $m + 4\mu$, $m + 6\mu, \ldots$ entsprechen, dieselben sein, wie die der Werthe, die einem beliebigen m entsprechen.

Hieraus kann geschlossen werden, dass, wenn man die Reste haben will, die der Division der Glieder $t_1, t_2, t_3, \ldots$ und $u_1, u_2, u_3, \ldots$, welche den $m = 1, 2, 3, \ldots$ entsprechen, durch die Zahl Δ angehören, es genügen wird, diese Reste bis zu den Gliedern $t_{2\mu}$ und $u_{2\mu}$ inclusive zu bestimmen; denn nach

diesen Gliedern kehren dieselben Reste in derselben Reihenfolge wieder bis ins Unendliche.

Hinsichtlich der Glieder $t_{2\mu}$ und $u_{2\mu}$, bei denen man stehen bleiben kann, ist zu bemerken, dass es diejenigen sind, von denen das eine genau durch Δ theilbar erscheint, während das andere den Rest 1 lassen wird; also braucht man die Division nur bis dahin fortzusetzen, bis man die Reste 1 und 0 erhält, alsdann wird man sicher sein, dass die folgenden Glieder stets die bereits gefundenen Reste wieder ergeben werden.

Man könnte auch den Exponenten 2μ a priori finden; dazu brauchte man nur die in No. 71 2. angezeigte Rechnung auszuführen, und zwar zunächst für die Zahl A und dann für die Zahl $A\Delta^2$; und nennt man ω den Index des Gliedes der Reihe P_1, P_2, P_3, ..., der im ersten Falle $= 1$ sein wird, und ϱ den Index des Gliedes, welches im zweiten Falle $= 1$ sein wird, so hat man nur das kleinste Vielfache von ω und ϱ zu suchen, welches, durch ω dividirt, den geforderten Werth von μ ergiebt.

Hat man z. B. $A = 6$ und $\Delta = 3$, so findet man in der Tabelle der No. 41 für $\sqrt{6}$:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = -2, \quad P_2 = 1;$$

also $\varpi = 2$; alsdann findet man in derselben Tabelle für $\sqrt{6 . 9} = \sqrt{54}$:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = -5, \quad P_2 = 9, \quad P_3 = -2, \quad P_4 = 9,$$
$$P_5 = -5, \quad P_6 = 1;$$

also $\varrho = 6$; das kleinste Vielfache von 2 und 6 ist aber 6, welches, durch 2 dividirt, den Quotienten 3 ergiebt, so dass man hier $\mu = 3$ und $2\mu = 6$ hat.

Um also in diesem Falle alle Reste der Division der Glieder der Reihen t_1, t_2, t_3, ... und u_1, u_2, u_3, ... durch 3 zu haben, wird es genügen, die der sechs ersten in beiden Reihen zu suchen; denn die folgenden werden stets dieselben Reste geben, d. h. die siebenten werden dieselben Reste geben, wie die ersten, die achten wie die zweiten u. s. f. bis ins Unendliche.

Uebrigens kann es bisweilen vorkommen, dass die Glieder t_μ und u_μ dieselben Eigenschaften haben, wie die Glieder

$t_{2\mu}$ und $u_{2\mu}$, d. h. dass u_μ durch Δ theilbar ist und t_μ den Rest 1 lässt. In diesem Falle kann man bei eben diesen Gliedern stehen bleiben; denn die Reste der folgenden Glieder $t_{\mu+1}, t_{\mu+2}, \ldots$ und $u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \ldots$ werden dieselben sein wie die der Glieder $t_1, t_2, \ldots u_1, u_2, \ldots$ u. s. f. — Im Allgemeinen wollen wir mit M den kleinsten Werth des Exponenten m bezeichnen, der $t - 1$ und u durch Δ theilbar werden lässt.

79. Angenommen nun, man habe irgend einen aus t und u, und aus ganzen Zahlen bestehenden Ausdruck, der stets ganze Zahlen darstelle, und man fragt nach den dem Exponenten m zu ertheilenden Werthen, die den Ausdruck durch irgend eine gegebene Zahl Δ theilbar werden lassen; alsdann hat man bloss $m = 1, 2, 3, \ldots$ bis M zu setzen; wenn kein Werth von m die Theilbarkeit durch Δ ermöglicht, so darf man dreist schliessen, dass solches niemals, d. h. für keinen einzigen Werth von m statthaben werde.

Findet man aber auf diesem Wege einen oder mehrere Werthe von m, die die Theilbarkeit durch Δ ergeben, und nennt man einen jeden dieser Werthe N, so sind alle möglichen gleichfalls genügenden Werthe von m:

$$N, \quad N + M, \quad N + 2M, \quad N + 3M, \ldots,$$

also allgemein

$$N + \lambda M,$$

wo λ irgend eine ganze Zahl bedeutet.

Ist ferner ein anderer, gleichfalls aus t, u und ganzen Zahlen bestehender Ausdruck gegeben, der zugleich durch irgend eine andere Zahl Δ_1 theilbar sein soll, so würde man ebenso wie vorhin die passenden Werthe von M und N suchen, die wir hier mit M_1 und N_1 bezeichnen wollen, und alle genügenden Werthe von m würden in der Form

$$N_1 + \lambda_1 M_1$$

gegeben sein, wo λ_1 irgend eine ganze Zahl bedeutet. Also brauchte man nur noch die den ganzen Zahlen λ und λ_1 zu gebenden Werthe zu suchen, so dass

$$N + \lambda M = N_1 + \lambda_1 M_1,$$

oder

$$M\lambda - M_1 \lambda_1 = N_1 - N,$$

welche Gleichung nach der Methode in No. 42 zu lösen ist.

Jetzt ist es leicht, die Anwendung des vorstehend Auseinandergesetzten auf den Fall in No. 77 anzuwenden, wo die vorgelegten Ausdrücke die Form

$$\alpha t + \beta u + \gamma, \quad \alpha_1 t + \beta_1 u + \gamma_1$$

haben, und wo die Theiler δ und δ_1 sind.

Man muss nur im Auge behalten, dass die Zahlen t und u nach einander mit positivem und mit negativem Zeichen zu versehen sind, um alle möglichen Fälle zu erhalten.

1. Beispiel.

80. *Es soll der Ausdruck*

$$\sqrt{30 + 62s - 7s^2},$$

rational werden, während s *nur eine ganze Zahl sein darf.*

Man hat also die Gleichung

$$30 + 62s - 7s^2 = y^2$$

zu lösen, welche, mit 7 multiplicirt, in diese Gestalt gebracht werden kann:

$$7.30 + (31)^2 - (7s - 31)^2 = 7y^2$$

oder, wenn $7s - 31 = x$ gesetzt und hinübergebracht wird,

$$x^2 = 1171 - 7y^2, \quad \text{oder} \quad x^2 + 7y^2 = 1171.$$

Diese Gleichung gehört nun in den Fall von No. 64, und man hat $A = -7$ und $B = 1171$; hieraus erhellt, dass y und B relativ prim sein müssen, weil die letztere Zahl keinen quadratischen Factor enthält.

Nach der Methode in No. 65 mache man:

$$x = ny - 1171z,$$

und damit diese Gleichung lösbar sei, muss für n eine ganze, positive oder negative Zahl gefunden werden, die nicht grösser ist, als $\frac{B}{2}$, also nicht grösser als 586, so dass $n^2 - A$ oder $n^2 + 7$ durch B, also durch 1171 theilbar sei.

Ich finde $n = \pm 321$, welches $n^2 + 7 = 1171.88$ ergiebt; also substituire ich in vorstehender Gleichung $\pm 321y - 1171z$ für x, wodurch sie vollkommen durch 1171 theilbar wird, und nach ausgeführter Division kommt:

$$88y^2 \mp 642yz + 1171z^2 = 1.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, will ich die zweite in No. 70 gegebene Methode anwenden, weil sie in der That einfacher und bequemer ist, als die erste. Da der Coefficient von y^2 kleiner ist, als der von z^2, erhalte ich hier $D = 1171$, $D_1 = 88$ und $n = \pm 321$; behalten wir der Einfachheit wegen den Buchstaben y statt θ bei und setzen y_1 statt z; führen wir nun folgende Rechnung aus, wo zunächst $n = 321$ ist:

$$m = \frac{321}{88} = 4, \qquad n_1 = 321 - 4.88 = -31,$$

$$m_1 = \frac{-31}{11} = -3, \quad n_2 = -31 + 3.11 = 2,$$

$$m_2 = \frac{2}{1} = 2, \qquad n_3 = 2 - 2.1 = 0,$$

$$D_2 = \frac{31^2 + 7}{88} = 11, \quad y = 4y_1 + y_2,$$

$$D_3 = \frac{4 + 7}{11} = 1, \qquad y_1 = -3y_2 + y_3,$$

$$D_4 = \frac{7}{1} = 7, \qquad y_2 = 2y_3 + y_4.$$

Da $n_3 = 0$ und mithin $< \frac{D_3}{2}$ und $< \frac{D_4}{2}$, so hört man hier auf und macht

$$D_3 = M = 1, \quad D_4 = L = 7, \quad n_3 = 0 = N,$$
$$\text{und} \quad y_3 = \xi, \quad y_4 = \psi,$$

weil $D_3 < D_4$.

Jetzt bemerken wir, dass, da $A = -7$ und mithin negativ ist, man zur Lösung der Gleichung $M = 1$ setzen muss; da dieser Werth hier wirklich gefunden ist, so kann man

schliessen, dass es eine Lösung giebt. Man setzt also $\xi = y_3 = 0$, $\psi = y_4 = \pm 1$ und erhält auf Grund der oben entwickelten Formeln:

$$y_2 = \pm 1, \quad y_1 = \mp 3 = z, \quad y = \mp 12 \pm 1 = \mp 11,$$

wo die Doppelzeichen nach Willkür genommen werden können. Es ist also

$$x = 321\,y - 1171\,z = \mp 18,$$

und mithin

$$s = \frac{x + 31}{7} = \frac{31 \mp 18}{7} = \frac{13}{7}, \text{ oder } = \frac{49}{7} = 7.$$

Da aber s eine ganze Zahl sein soll, kann man nur $s = 7$ nehmen.

Es ist bemerkenswerth, dass der andere Werth von s, $\frac{13}{7}$, obwohl ein Bruch, dennoch eine ganze Zahl für den Werth des Ausdruckes $\sqrt{30 + 62s - 7s^2}$ ergiebt, und zwar ebendieselbe Zahl 11, wie der Werth $s = 7$, so dass diese beiden Werthe von s die Wurzeln der Gleichung

$$30 + 62s - 7s^2 = 121$$

sind.

Wir haben bis jetzt $n = 321$ vorausgesetzt; man kann aber auch $n = -321$ annehmen; indess ist leicht ersichtlich, dass dadurch nichts anderes in vorstehenden Formeln geändert wird, als die Aenderung der Zeichen von m, m_1, m_2, und n_1, n_2; in Folge dessen erhalten auch y_1 und y verschiedene Zeichen und man erhält kein neues Resultat, da die Werthe ohnehin schon das Doppelzeichen haben.

Ganz dasselbe findet in allen anderen Fällen statt, so dass man sich immer ersparen kann, den Werth von n mit positivem und mit negativem Zeichen zu nehmen.

Der Werth $s = 7$, den wir soeben gefunden haben, folgte aus dem Werthe $n = \pm 321$; man könnte andere Werthe von s finden, wenn man andere der geforderten Bedingung genügende Werthe von n hätte; da aber der Theiler 1171 eine Primzahl ist, so kann es keine anderen Werthe von derselben Eigenschaft geben, wie wir solches anderwärts

bewiesen haben (Memoiren der Berliner Akademie von 1767, Seite 194*), woraus zu folgern ist, dass 7 die einzige der gestellten Bedingung genügende Zahl ist.

Ich bekenne übrigens, dass man die vorstehende Aufgabe leichter durch Herumtasten lösen kann; denn sobald man zur Gleichung $x^2 = 1171 - 7y^2$ gelangt ist, braucht man für y nur alle ganzen Zahlen, deren Quadrate, mit 7 multiplicirt, nicht grösser sind als 1171, durchzuversuchen, also alle Zahlen $< \sqrt{\frac{1171}{7}} < 13$.

Dasselbe gilt für alle Gleichungen, in denen A negativ ist; denn sobald man zur Gleichung

$$x^2 = B + Ay^2$$

gelangt ist, oder, wenn man $A = -a$ setzt, zu

$$x^2 = B - ay^2,$$

so werden sich die genügenden Werthe von y, wenn sie vorhanden sind, nur unter den Zahlen finden, die kleiner sind als $\sqrt{\frac{B}{a}}$. Auch habe ich für den Fall eines negativen A nur deshalb besondere Methoden gegeben, weil diese Methoden eng mit denen zusammenhängen, die sich auf den Fall eines positiven A beziehen, und weil alle diese Methoden, wenn sie mit einander verglichen werden, sich gegenseitig erläutern und mit grösserer Evidenz hervortreten.

2. Beispiel.

81. Wir wollen jetzt einige Beispiele geben für den Fall, dass A positiv sei; man fordert alle ganzen Zahlen für y, die den Ausdruck

$$\sqrt{13y^2 + 101}$$

rational machen.

Man hat hier nach No. 64 $A = 13$, $B = 101$, und die zu lösende Gleichung wird die folgende sein:

$$x^2 - 13y^2 = 101,$$

*) Œuvres de *Lagrange*, t. II, p. 377.

wo, weil 101 durch kein Quadrat theilbar ist, y nothwendig prim zu 101 sein wird.

Man mache also nach No. 65:

$$x = ny - 101z,$$

so muss $n^2 - 13$ durch 101 theilbar sein, wo $n < \frac{101}{2} < 51$.

Ich finde $n = 35$, welches

$$n^2 = 1225, \text{ und } n^2 - 13 = 1212 = 101.12$$

ergiebt; man nehme also $n = \pm 35$, substituirt für x: $\pm 35y - 101z$ und erhält eine durchweg durch 101 theilbare Gleichung, die nach ausgeführter Division:

$$12y^2 \mp 70yz + 101z^2 = 1.$$

Benutzen wir zur Auflösung dieser Gleichung die Methode der No. 70, machen $D_1 = 12$, $D = 101$, $n = \pm 35$; aber statt θ behalten wir den Buchstaben y und ändern bloss z in y_1, wie im vorigen Beispiel.

Es sei 1. $n = 35$; man führe folgende Rechnung aus:

$$m = \frac{35}{12} = 3, \qquad n_1 = 35 - 3.12 = -1,$$

$$m_1 = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad n_2 = -1 + 1 = 0,$$

$$D_2 = \frac{1-13}{12} = -1, \quad y = 3y_1 + y_2,$$

$$D_3 = \frac{-13}{-1} = 13, \qquad y_1 = y_2 + y_3.$$

Da $n_2 = 0$ und mithin $< \frac{D_2}{2}$ und $< \frac{D_3}{2}$, so hört man hier auf und erhält die Transformirte:

$$D_3 y_2^2 - 2n_2 y_2 y_3 + D_2 y_3^2 = 1,$$

oder

$$13y_2^2 - y_3^2 = 1,$$

welche auf die Form

$$y_3^2 - 13y_2^2 = -1$$

gebracht, der Methode 71, 2 zugänglich wird; da $A = 13 < 100$ ist, so kann die Tabelle in No. 41 angewandt werden.

Man braucht also nur nachzusehen, ob in der oberen der $\sqrt{13}$ entsprechenden Reihe sich die Zahl 1 an einem geradzahligen Platze befindet; denn soll die vorgelegte Gleichung lösbar sein, so muss in der Reihe $P_0, P_1, P_2, \ldots$ ein Glied $= -1$ vorkommen; man hat aber $P_0 = 1$, $-P_1 = 4$, $P_2 = 3, \ldots$; also u. s. f. Ferner, in der Reihe 1, 4, 3, 3, 4, 1, ... findet man 1 auf dem sechsten Platze, so dass $P_5 = -1$; also giebt es eine Lösung, indem man $y_3 = p_5$ und $y_2 = q_5$ setzt, wo die Zahlen p_5, q_5 nach den Formeln in No. 25 berechnet sind, indem man den $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ die Werthe 3, 1, 1, 1, 1, 6, ... der unteren der $\sqrt{13}$ entsprechenden Zahlenreihe entnimmt.

Man erhält also:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 1, & q_0 &= 0, \\
p_1 &= 3, & q_1 &= 1, \\
p_2 &= p_1 + p_0 = 4, & q_2 &= 1, \\
p_3 &= p_2 + p_1 = 7, & q_3 &= q_2 + q_1 = 2, \\
p_4 &= p_3 + p_2 = 11, & q_4 &= q_3 + q_2 = 3, \\
p_5 &= p_4 + p_3 = 18; & q_5 &= q_4 + q_3 = 5,
\end{aligned}
$$

Also ist $y_3 = 18$ und $y_2 = 5$; mithin;

$$y_1 = y_2 + y_3 = 23, \text{ und } y = 3y_1 + y_2 = 74.$$

Wir haben bis jetzt $n = 35$ vorausgesetzt, aber man kann auch $n = -35$ nehmen.

Es sei also 2. $n = -35$; man mache

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{-35}{12} = -3, & n_1 &= -35 + 3.12 = 1, \\
m_1 &= \frac{1}{-1} = -1, & n_2 &= 1 - 1 = 0, \\
D_2 &= \frac{1 - 13}{12} = -1, & y &= -3y_1 + y_2, \\
D_3 &= \frac{-13}{-1} = 13, & y_1 &= -y_2 + y_3;
\end{aligned}
$$

man erhält also dieselben Werthe von D_2, D_3 und n_2 wie früher, so dass die in y_2 und y_3 transformirte Form auch dieselbe wie früher sein wird.

Man hat daher auch $y_3 = 18$, $y_2 = 5$; mithin:

$$y_1 = -y_2 + y_3 = 13, \quad \text{und} \quad y = -3y_1 + y_2 = -34.$$

Wir haben also zwei Werthe von y mit den entsprechenden von y_1 und z_1 gefunden und diese Werthe stammen aus der Annahme $n = \pm 35$; da nun aber kein anderer, den geforderten Bedingungen genügender Werth von n gefunden werden kann, so folgt, dass die vorstehenden Werthe die einzigen *primitiven* sind, die man erlangen kann; aber eine unendliche Menge davon *abgeleiteter* Werthe können nach No. 72 gefunden werden.

Nimmt man nun diese Werthe von y und z für p und q, so erhält man allgemein, nach der Methode in No. 72:

$$y = 74t - (101.23 - 35.74)u = 74t + 267u,$$
$$z = 23t + (\ 12.74 - 35.23)u = 23t + \ 83u,$$

oder

$$y = -34t - (101.13 - 35.34)u = -34t - 123u,$$
$$z = 13t + (-12.34 + 35.13)u = 13t + 47u,$$

und man braucht nur noch die Werthe von t und u der Gleichung

$$t^2 - 13u^2 = 1$$

zu entnehmen. Indess finden sich diese Werthe sämmtlich bereits berechnet in der am Ende des VII. Kapitels von *Eulers* Algebra mitgetheilten Tabelle; man erhält also sofort $t = 649$ und $u = 180$; nimmt man diese Werthe für T und U in den Formeln in No. 75, so kommt allgemein:

$$t = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m + (649 - 180\sqrt{13})^m}{2},$$

$$u = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m - (649 - 180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}},$$

wo man dem m beliebige Werthe zuertheilen kann, die jedoch ganzzahlig und positiv sein müssen.

Da nun die Werthe von t und u sowohl positiv als negativ genommen werden können, so werden die der Bedingung genügenden Werthe von y sämmtlich in folgenden zwei Formeln eingeschlossen sein:

$$y = \pm 74t \pm 267u,$$
$$y = \pm 34t \pm 123u,$$

wo die Doppelzeichen beliebig genommen werden können.

Macht man $m = 0$, so kommt $t = 1$ und $u = 0$; folglich

$$y = \pm 74, \quad \text{oder} \quad = \pm 34,$$

und dieser letzte wird der kleinste der Aufgabe genügende Werth sein.

Wir haben diese Aufgabe schon in den Memoiren der Berliner Akademie von 1768, Seite 243*) gelöst; da aber die dort angewandte Methode ein wenig von der vorstehenden abweicht und im Grunde mit der ersten hier in No. 66 gegebenen übereinstimmt, so glaubten wir sie hier wiederholen zu müssen, damit die nach beiden Methoden gefundenen Resultate, wenn solches nöthig erscheint, mit einander verglichen werden können.

3. Beispiel.

82. *Es soll ferner in ganzen Zahlen für y der Ausdruck*

$$\sqrt{79y^2 + 101}$$

rational werden.

Man hat also in ganzen Zahlen zu lösen die Gleichung

$$x^2 - 79y^2 = 101,$$

wo y prim zu 101 sein wird, da diese Zahl keinen quadratischen Factor enthält.

Man setze

$$x = ny - 101z,$$

und es muss $n^2 - 79$ durch 101 theilbar sein, während

*) Œuvres de *Lagrange*, t. II, p. 719.

$n < \frac{101}{2} < 51$; man findet $n = 33$, und das ergiebt:

$$n^2 - 79 = 1010 = 101 . 10.$$

Man kann also $n = \pm 33$ nehmen und diese Werthe allein erfüllen die gestellte Bedingung.

Setzt man nun $\pm 33y - 101z$ für x ein und dividirt die ganze Gleichung durch 101, so erhält man die transformirte:

$$10y^2 \mp 66yz + 101z^2 = 1.$$

Man mache also $D_1 = 10$, $D = 101$, $n = \pm 33$; nimmt man erst n positiv, so verfährt man wie im vorigen Beispiel und erhält:

$$m = \frac{33}{10} = 3, \qquad n_1 = 33 - 3 . 10 = 3,$$

$$D_2 = \frac{9 - 79}{10} = -7, \quad y = 3y_1 + y_2.$$

Da nun $n_1 = 3$ schon $< \frac{D_1}{2}$ und $< \frac{D_2}{2}$, so braucht man nicht weiter zu gehen; man erhält die Transformation:

$$-7y_1^2 - 6y_1y_2 + 10y_2^2 = 1,$$

welche, mit -7 multiplicirt, in die Gestalt

$$(7y_1 + 3y_2)^2 - 79y_2^2 = -7$$

gebracht werden kann.

Da nun $7 < \sqrt{79}$, so muss, wenn die Gleichung lösbar sein soll, die Zahl 7 unter den Gliedern der oberen der $\sqrt{79}$ entsprechenden Tabelle in No. 41 sich vorfinden und ausserdem muss diese Zahl 7 eine paarige Stelle einnehmen, da es das negative Zeichen hat. Aber die fragliche Reihe enthält nur die Zahlen 1, 15, 2, die immer wiederkehren; man muss also sofort schliessen, dass die letzte Gleichung, und ebenso die vorgelegte, nicht lösbar ist, wenigstens nicht mit dem Werthe $n = 33$.

Es erübrigt also, den anderen Werth $n = -33$ zu unter-

suchen, und dieser ergiebt:

$$m = \frac{-33}{10} = -3, \quad n_1 = -33 + 3.10 = -3,$$

$$D_2 = \frac{9-79}{10} = -7, \quad y = -3y_1 + y_2,$$

also dass man diese andere Transformirte erhält:

$$-7y_1^2 + 6y_1y_2 + 10y_2^2 = 1,$$

und diese kann auf die Form

$$(7y_1 - 3y_2)^2 - 79y_2^2 = -7$$

gebracht werden, die der vorigen ähnlich ist. Hieraus schliesse ich, dass die vorgelegte Gleichung überhaupt keine Lösung in ganzen Zahlen zulässt.

Bemerkung.

83. *Euler* findet in einer ausgezeichneten im IX. Bande der neuen Petersburger Commentarien gedruckten Abhandlung durch Induction folgende Regel zur Beurtheilung der Lösbarkeit aller Gleichungen von der Form

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

wo B eine Primzahl ist; die Gleichung ist allemal möglich, wenn B die Form $4An + r^2$ oder $4An + r^2 - A$ hat; aber das vorhergehende Beispiel lehrt die Unrichtigkeit dieser Regel; denn 101 ist eine Primzahl von der Form $4An + r^2 - A$, wenn $A = 79$, $n = -4$ und $r = 38$ gesetzt wird; dennoch lässt die Gleichung

$$x^2 - 79y^2 = 101$$

keine Lösung in ganzen Zahlen zu.

Wäre die fragliche Regel richtig, so würde daraus folgen, dass, wenn die Gleichung $x^2 - Ay^2 = B$ für einen beliebigen Werth b von B möglich ist, sie auch für $B = 4An + b$ möglich ist, wenn nur B eine Primzahl ist. Man könnte die Regel einschränken, indem man hinzufügt, dass auch b eine Primzahl sein müsse; aber diese Einschränkung wird

gleichfalls durch das vorliegende Beispiel widerlegt, denn man hat $101 = 4An + b$, indem man $A = 79$ nimmt, $n = -2$ und $b = 733$. Aber 733 ist eine Primzahl von der Form $x^2 - 79y^2$, indem $x = 38$ und $y = 3$; trotzdem ist 101 nicht von der Form $x^2 - 79y^2$.

§ VIII. Bemerkungen über die Gleichungen von der Form $p^2 = Aq^2 + 1$ und über die gewöhnliche Methode sie in ganzen Zahlen aufzulösen.

84. Die im VII. Kapitel von *Euler*s Algebra gegebene Methode zur Lösung derartiger Gleichungen ist dieselbe, die *Wallis* im XCVIII. Kapitel seiner Algebra giebt und die er dem Herrn *Brouncker* zuschreibt; man findet sie auch in der Algebra von *Ozanam*, der sie *Fermat* zuschreibt. Wer nun auch der Erfinder dieser Methode sei, sicher ist *Fermat* der Autor des fraglichen Problems; er hat dasselbe als Herausforderung allen englischen Geometern vorgelegt, wie man das aus dem *Commercium epistolicum* von *Wallis* ersieht; das gab dem Herrn *Brouncker* den Anlass, die bezügliche Methode zu ersinnen; es scheint indess, dass dieser Autor nicht die ganze Tragweite des von ihm gelösten Problems gekannt habe; selbst in *Fermat*s hinterlassenen Schriften findet man Nichts hierüber, und ebensowenig in irgend einer Abhandlung der unbestimmten Analysis des vorigen Jahrhunderts. Es liegt nahe zu glauben, dass *Fermat*, der sich besonders mit der Theorie der ganzen Zahlen beschäftigte, worüber er uns übrigens sehr schöne Theoreme hinterlassen hat, auf das fragliche Problem bei der allgemeinen Auflösung der Gleichungen von der Form

$$x^2 = Ay^2 + B$$

gestossen ist, auf welche alle Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten zurückgeführt werden; indessen verdanken wir erst *Euler* die Bemerkung, dass dieses Problem nothwendig sei, um zu allen möglichen Lösungen dieser Art von Gleichungen zu gelangen. (Siehe Kapitel VI seiner Algebra, ferner Band VI der alten und Band IX der neuen Petersburger Commentarien.

Die von uns befolgte Methode weicht etwas von der *Eulers* ab; sie ist aber auch, wenn ich nicht irre, einfacher und allgemeiner; denn einerseits führt *Eulers* Methode zu Bruchausdrücken da, wo man sie vermeiden will, und andererseits sieht man nicht deutlich, dass der Vorgang, die Brüche verschwinden zu lassen, der einzig mögliche sei. In der That haben wir gezeigt, dass es nicht immer genügt, eine einzige Lösung der Gleichung

$$x^2 = Ay^2 + B$$

zu finden, um alle anderen mit Hülfe der Gleichung

$$p^2 = Aq^2 + 1$$

daraus herzuleiten, und dass oft, wenigstens sobald B keine Primzahl ist, die Werthe von x und y nicht in *Eulers* allgemeinen Ausdrücken eingeschlossen sein können. (Siehe No. 45 meines *Mémoire sur les Problèmes indéterminés* in den *Berliner Memoiren* von 1767 *).

Hinsichtlich der Lösung der Gleichungen von der Form

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

erscheint uns die im VII. Kapitel gegebene Methode, wie geistvoll sie auch sei, doch noch ziemlich unvollkommen; denn 1. lässt sie nicht erkennen, dass jede Gleichung dieser Art stets in ganzen Zahlen lösbar sei, sobald A eine positive nichtquadratische Zahl ist; 2. ist nicht bewiesen, dass sie stets zum Ziele führen müsse. *Wallis* freilich hat behauptet, die erste dieser Anforderungen erfüllt zu haben; sein Beweis ist aber, wenn ich es sagen darf, nichts als eine *petitio principii*. (Siehe das XCIX. Kapitel seiner *Algebra*.) Ich glaube mithin der erste zu sein, der eine vollständig strenge Lösung gegeben hat; man findet sie im Band IV der miscellanea societatis taurinensis **); aber sie ist sehr umständlich und sehr indirect; die vorstehend in No. 37 gegebene ist den wahren Grundsätzen der Frage gemäss und lässt, wie mir scheint, nichts zu wünschen übrig. Diese Methode gestattet uns auch die andere, im VII. Kapitel entwickelte, zu schätzen und die

---

*) Œuvres de *Lagrange*, t. II, p. 457.
**) Œuvres de *Lagrange*, t. I, p. 671.

Schwierigkeiten zu erkennen, die einem begegnen, wenn man sie ohne alle Vorsicht anwendet; das soll jetzt untersucht werden.

85. Aus dem in § II Bewiesenen folgt, dass die der Gleichung $p^2 - Aq^2 = 1$ genügenden Werthe von p und q nichts anderes sein können, als Glieder eines der Hauptbrüche, die aus dem den Werth von $\sqrt{A}$ darstellenden Kettenbruch hergeleitet werden; so dass, wenn dieser Kettenbruch durch

$$\mu + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cdots}}},$$

ausgedrückt wird, man nothwendig

$$\frac{p}{q} = \mu + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{\mu_\varrho}}},$$

haben wird, wo μ_ϱ irgend ein Glied der unendlichen Reihe $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ist, und wo der Index ϱ nur *a posteriori* bestimmt werden kann. Man muss bemerken, dass in diesem Kettenbruch die Zahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ alle positiv sein müssen, obgleich wir in No. 3 gesehen haben, dass man im Allgemeinen in Kettenbrüchen die Nenner positiv oder negativ nehmen kann, je nachdem man grössere oder kleinere Näherungswerthe zu den wahren Werthen annimmt; aber die bei der I. Aufgabe angewandte Methode (No. 23 ff.) fordert, dass man immer nur den kleineren Näherungswerth nehme.

86. Da nun der Bruch $\frac{p}{q}$ einem Kettenbruch gleich ist, dessen Glieder $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varrho$ sind, so folgt aus der No. 4, dass μ der Quotient aus $\frac{p}{q}$ ist, und μ_1 der von q dividirt durch den Rest, μ_2 der von diesem Rest dividirt durch den

zweiten Rest, u. s. f.; so dass, wenn $r, s, t, \ldots$ die fraglichen Reste sind, man erhält:

$$p = \mu q + r, \quad q = \mu_1 r + s, \quad r = \mu_2 s + t, \quad \ldots,$$

wo der letzte Rest nothwendig gleich 0 und der vorletzte gleich 1 sein wird, weil p und q relativ prim zu einander sind. Also ist μ der ganzzahlige Näherungswerth von $\frac{p}{q}$, μ_1 der von $\frac{q}{r}$, μ_2 der von $\frac{r}{s}$ u. s. f., und diese Werthe sind alle kleiner als die wirklichen, ausgenommen der letzte μ_ϱ, der genau gleich dem entsprechenden Kettenbruch ist, denn der folgende Rest ist gleich 0 vorausgesetzt.

Da nun die Zahlen μ, μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_\varrho$ ebendieselben sind, die für den Kettenbruch den Werth von $\frac{p}{q}$ geben, sowie für diejenigen, die den Werth von $\sqrt{A}$ darstellen, so kann man bis zu dem Gliede μ_ϱ, $\frac{p}{q} = \sqrt{A}$ nehmen, d. h. $p^2 - Aq_2 = 0$. Man wird also zunächst den kleineren Näherungswerth von $\frac{p}{q}$ suchen, d. h. von $\sqrt{A}$, und das wird der Werth von μ sein; alsdann wird man in $p^2 - Aq^2 = 0$ statt p seinen Werth $\mu q + r$ einsetzen, und man erhält:

$$(\mu^2 - A)q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0,$$

dann sucht man wiederum den kleineren Nährungswerth von $\frac{q}{r}$, d. h. der positiven Wurzel der Gleichung

$$(\mu^2 - A)\left(\frac{q}{r}\right)^2 + 2\mu\frac{q}{r} + 1 = 0,$$

und man wird den Werth von μ_1 haben.

Man wird nun fortfahren in der transformirten Gleichung

$$(\mu^2 - A)q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0,$$

an Stelle von q, $\mu r + s$ zu setzen; dadurch erhält man eine Gleichung, deren Wurzel gleich $\frac{r}{s}$ ist; man wird den

kleineren Näherungswerth dieser Wurzel nehmen und μ_2 erhalten. Dann substituirt man $\mu_2 s + t$ statt r, u. s. f.

Angenommen nun, t sei der letzte Rest, der also gleich 0 sein muss; es wird dann s der vorletzte sein, gleich 1; wenn also die in s und t Transformirte der Form $p^2 - Aq^2$ gleich

$$Ps^2 + Qst + Rt^2$$

ist, so muss diese durch $t = 0$ und $s = 1$ gleich 1 werden, wenn die vorgelegte Gleichung $p^2 - Aq^2$ soll bestehen können; folglich muss $P = 1$ sein. Also müssen die Operationen und Transformationen fortgesetzt werden, bis man eine Transformirte erreicht, wo der Coefficient des ersten Gliedes gleich 1 ist; alsdann setzt man in dieser Formel die erste der beiden Unbekannten, wie r, gleich 1 und die zweite, wie s, gleich 0; und steigt man rückwärts vor, so erhält man die passenden Werthe von p und q.

Man könnte auch mit der Gleichung $p^2 - Aq^2 = 1$ selbst vorgehen, wenn man nur absieht vom bekannten Gliede 1 und folglich auch von den anderen bekannten Gliedern, die sich aus diesem ergeben könnten bei Bestimmung der Näherungswerthe $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ von $\frac{p}{q}, \frac{q}{r}, \frac{r}{s}, \ldots$; in diesem Falle wird man bei jeder neuen Transformation nachsehen, ob die transformirte Gleichung bestehen könne, wenn man die eine Unbekannte gleich 0 und die andere gleich 1 setzt; ist man bis zu einer solchen Transformirten gelangt, so ist die Operation vollendet und man braucht nur seinen Weg zurück zu verfolgen, um die gesuchten Werthe von p und q zu erhalten.

So sind wir denn auf die Methode des VII. Kapitels herausgekommen. Um diese Methode an und für sich zu prüfen, unabhängig von den Principien, aus denen wir sie hergeleitet haben, dürfte es gleichgültig erscheinen, ob die kleineren oder die grösseren Näherungswerthe von $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ genommen werden, wenn nur die Werthe von $r, s, t, \ldots$ immer mehr bis Null abnehmen (No. 6).

Auch bemerkt *Wallis* ausdrücklich, man dürfe nach Belieben die grösseren oder die kleineren Näherungswerthe für die Zahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ anwenden, ja er schlägt sogar dieses Mittel vor, um zuweilen die Rechnung abzukürzen; und *Euler* bemerkt dasselbe in No. 102 ff. des angeführten Kapitels;

indessen will ich an einem Beispiel zeigen, dass man bei solch einem Verfahren Gefahr läuft, niemals die Lösung der vorgelegten Gleichung zu finden.

Nehmen wir das Beispiel 101 eben jenes Kapitels, wo es sich darum handelt, eine Gleichung von der Form

$$p^2 = 6q^2 + 1, \text{ oder } p^2 - 6q^2 = 1$$

zu lösen. Man hat also $p = \sqrt{6q^2 + 1}$ und, bei Vernachlässigung des constanten Gliedes 1, $p = q\sqrt{6}$; also $\frac{p}{q} = \sqrt{6} > 2$ und < 3; nehmen wir die untere Grenze und setzen $\mu = 2$, und dann $p = 2q + r$; substituirt man dieses, so kommt

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1;$$

also:

$$q = \frac{2r + \sqrt{6r^2 - 2}}{2},$$

oder, indem man den constanten Werth -2 fortlässt,

$$q = \frac{2r + r\sqrt{6}}{2}, \text{ woraus } \frac{q}{r} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} > 2 \text{ und } < 3.$$

Nehmen wir wiederum die untere Grenze und machen $q = 2r + s$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$r^2 - 4rs - 2s^2 = 1,$$

woraus zunächst erhellt, dass man $s = 0$ und $r = 1$ annehmen kann; also kommt $q = 2$, $p = 5$.

Jetzt nehmen wir die erste Transformirte wieder vor:

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1,$$

aus der wir gesehen haben, dass $\frac{q}{r} > 2$ und < 3 sei, und statt die untere Grenze zu nehmen, nehmen wir den oberen Werth, d. h. wir nehmen $q = 3r + s$ oder, da s alsdann negativ sein muss, $q = 3r - s$; man erhält folgende Transformirte:

$$-5r^2 + 8rs - 2s^2 = 1,$$

und diese ergiebt

$$r = \frac{4s + \sqrt{6s^2 - 5}}{5};$$

also, indem man den constanten Werth vernachlässigt:

$$r = \frac{4s + s\sqrt{6}}{5}, \text{ und } \frac{r}{s} = \frac{4 + \sqrt{6}}{5} > 1 \text{ und } < 2.$$

Nehmen wir nochmals die obere Grenze und setzen $r = 2s - t$; es kommt:

$$-6s^2 + 12st - 5t^2 = 1;$$

also

$$s = \frac{6t + \sqrt{6t^2 - 6}}{6};$$

folglich, mit Fortlassung von -6,

$$s = \frac{6t + t\sqrt{6}}{6} \text{ und } \frac{s}{t} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} > 1 \text{ und } < 2.$$

Nimmt man weiter stets die obere Grenze, und macht $s = 2t - u$, so kommt:

$$-5t^2 + 12tu - 6u^2 = 1;$$

also

$$t = \frac{6u + \sqrt{6u^2 - 5}}{5},$$

mithin:

$$\frac{t}{u} = \frac{6 + \sqrt{6}}{5} > 1 \text{ und } < 2.$$

Machen wir ebenso $t = 2u - x$; so kommt:

$$-2u^2 + 8ux - 5x^2 = 1;$$

also, u. s. f.

Nimmt man so immer weiter die oberen Grenzen, so wird man niemals eine Transformirte erhalten, wo der Coefficient des ersten Gliedes gleich 1 ist, was doch geschehen müsste, wenn man eine Lösung der vorgelegten Gleichung finden wollte.

Dasselbe wird nothwendig allemal eintreten, wenn man zuerst eine untere und darauf stets die oberen Grenzen nimmt; den Grund dafür kann ich *a priori* angeben; da aber der Leser ihn leicht finden wird auf Grund der Principien unserer Theorie, will ich mich dabei nicht aufhalten. Für jetzt begnüge ich mich, dargethan zu haben, dass diese Art von Aufgaben strenger und tiefer als bisher zu behandeln ist.

§ IX. Ueber die Art, algebraische Functionen aller Grade zu finden, die, mit einander multiplicirt, stets ähnliche Functionen erzeugen.

(Zusatz zum XI. und XII. Kapitel.)

87. Ich glaube gleichzeitig mit *Euler* den Gedanken entwickelt zu haben, die irrationalen und selbst die imaginären Factoren in den Formen zweiten Grades zu benutzen zur Aufsuchung der Bedingungen, die diese Formen zu Quadraten oder beliebigen Potenzen machen; ich habe darüber in der Akademie im Jahre 1768 eine Abhandlung verlesen, die ich aber im Auszug mitgetheilt habe in meinen *Recherches sur les Problèmes indéterminés,* die sich in dem Bande des Jahres 1767*) befinden, welcher Band 1769 erschien, selbst vor der deutschen Ausgabe von *Euler*s Algebra.

An der eben erwähnten Stelle habe ich gezeigt, wie man die Methode auf höhere Formen als vom zweiten Grade ausdehnen könne; ich habe auf diesem Wege die Lösung einiger Gleichungen gegeben, mit denen es wohl sehr schwer gewesen wäre, auf anderem Wege zurecht zu kommen. Jetzt will ich diese Methode noch verallgemeinern, denn sie verdient die Aufmerksamkeit der Geometer ganz besonders wegen ihrer Neuheit und Eigenthümlichkeit.

88. Es seien α und β zwei Wurzeln der Gleichung zweiten Grades:

$$s^2 - as + b = 0,$$

und wir betrachten das Product der beiden Factoren

$$(x + \alpha y)(x + \beta y),$$

*) Œuvres de *Lagrange,* t. II, p. 377 und 655.

welches nothwendig reell sein wird; dieses Product ist gleich:

$$x^2 + (\alpha + \beta) xy + \alpha\beta y^2;$$

nun ist aber $\alpha + \beta = a$, und $\alpha\beta = b$ wegen der Gleichung $s^2 - as + b = 0$; man hat also folgende Formel zweiten Grades

$$x^2 + axy + by^2,$$

die aus zwei Factoren besteht:

$$x + \alpha y \text{ und } x + \beta y.$$

Jetzt ist ersichtlich, dass, wenn man eine ähnliche Formel hat:

$$x_1^2 + ax_1y_1 + by_1^2,$$

und man beide mit einander multipliciren wollte, es genügen müsste, die beiden Factoren $x + \alpha y$, $x_1 + \alpha y_1$ und die beiden $x + \beta y$, $x_1 + \beta y_1$ mit einander, und dann die beiden Producte mit einander zu multipliciren. Nun ist das Product von $x + \alpha y$ und $x_1 + \alpha y_1$ gleich:

$$xx_1 + \alpha(xy_1 + yx_1) + \alpha^2 yy_1;$$

da aber α eine Wurzel der Gleichung

$$s^2 - as + b = 0$$

ist, so hat man

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0; \text{ folglich } \alpha^2 = a\alpha - b;$$

substituirt man nun diesen Werth von α^2 in die vorstehende Formel, so kommt:

$$xx_1 - byy_1 + \alpha(xy_1 + yx_1 + ayy_1),$$

so dass, wenn man zur Vereinfachung einführt:

$$X = xx_1 - byy_1,$$
$$Y = xy_1 + yx_1 + ayy_1,$$

das Product der beiden Factoren $x + \alpha y$, $x_1 + \alpha y_1$ gleich

$$X + \alpha Y$$

wird, und mithin von derselben Form, wie ein jeder der Factoren. Man findet ebenso, dass das Product von $x+\beta y$, $x_1+\beta y_1$ gleich

$$X+\beta Y$$

wird, und das gesammte Product wird nunmehr:

$$(X+\alpha Y)(X+\beta Y), \text{ d. h. } X^2+aXY+bY^2.$$

Dies ist das Product der beiden ähnlichen Formen

$$x^2+axy+by^2,$$
$$x_1^2+ax_1y_1+by_1^2.$$

Wollte man das Product dreier ähnlicher Formen haben:

$$x^2+axy+by^2,$$
$$x_1^2+ax_1y_1+by_1^2,$$
$$x_2^2+ax_2y_2+by_2^2,$$

so brauchte man nur das Product der Formel

$$X^2+aXY+bY^2$$

mit $x_2^2+ax_2y_2+by_2^2$ zu multipliciren, und macht man

$$X_1=Xx_2-bYy_2,$$
$$Y_1=Xy_2+Yx_2+aYy_2,$$

so wird das gesuchte Product gleich

$$X_1^2+aX_1Y_1+bY_1^2.$$

Man kann ebenso das Product von vier oder mehr ähnlichen Formen wie

$$x^2+axy+by^2$$

finden und diese Producte werden stets die nämliche Form haben.

89. Macht man $x_1=x$ und $y_1=y$ so kommt:

$$X=x^2-by^2, \quad Y=2xy+ay^2,$$

und mithin:

$$(x^2 + axy + by^2)^2 = X^2 + aXY + bY^2.$$

Will man also die rationalen Werthe von X und Y finden, die die Form

$$X^2 + aXY + bY^2$$

zu einem Quadrat machen, so braucht man nur X und Y die vorstehenden Werthe zu geben und man erhält als Wurzel des Quadrats den Ausdruck

$$x^2 + axy + by^2,$$

wo x und y zwei Unbestimmte sind.

Macht man nun noch $x_2 = x_1 = x$ und $y_2 = y_1 = y$, so kommt:

$$X_1 = Xx - bYy, \quad Y_1 = Xy + Yx + aYy,$$

d. h. wenn man die vorstehenden Werthe von X und Y substituirt,

$$X_1 = x^3 - 3bxy^2 - aby^3,$$
$$Y_1 = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3;$$

also:

$$(x^2 + axy + by^2)^3 = X_1^2 + aX_1 Y_1 + bY_1^2.$$

Will man also die rationalen Werthe von x und y finden, die die Form

$$X_1^2 + aX_1 Y_1 + bY_1^2$$

zu einem Cubus machen, so braucht man nur X_1 und Y_1 die vorstehenden Werthe zu ertheilen und dadurch erhält man einen Cubus, dessen Wurzel gleich

$$x^2 + axy + by^2$$

ist, wo x und y zwei Unbestimmte sind.

In ähnlicher Weise könnte man die Probleme lösen, wo es sich darum handelt, vierte, fünfte, ... Potenzen hervorzubringen; aber man kann auch unmittelbar allgemeine Formeln für eine beliebige Potenz von m aufstellen, ohne dass man die vorangehenden niederen Potenzen zu beachten brauchte.

Es seien also die rationalen Werthe von X und Y gefordert, sodass die Form

$$X^2 + aXY + bY^2$$

eine m-te Potenz werde, d. h. es gilt, die Gleichung

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^m$$

zu lösen. Da die Grösse $X^2 + aXY + bY^2$ aus dem Product der beiden Factoren $X + \alpha Y$ und $X + \beta Y$ gebildet ist, so muss, damit diese Grösse eine Potenz m-ten Grades werde, ein jeder der beiden Factoren gleichfalls eine solche Potenz werden.

Machen wir also zunächst

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m,$$

und entwickeln diese Potenz nach dem Theorem von *Newton:*

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3\alpha^3 + \ldots.$$

Da nun α eine Wurzel der Gleichung

$$s^2 - as + b = 0$$

ist, so hat man auch

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0,$$

also

$$\alpha^2 = a\alpha - b, \qquad \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha = (a^2 - b)\alpha - ab,$$
$$\alpha^4 = (a^2 - b)\alpha^2 - ab\alpha = (a^3 - 2ab)\alpha - a^2b + b^2,$$

u. s. f. Man braucht also nur diese Werthe in die vorhergehende Formel einzusetzen und sie wird dadurch aus zwei Theilen zusammengesetzt erscheinen; den einen, rationalen, wird man mit X vergleichen, den anderen, mit der Wurzel α multiplicirten, mit αY.

Setzt man zur Abkürzung:

$$
\begin{array}{ll}
A_1 = 1, & B_1 = 0, \\
A_2 = a, & B_2 = b, \\
A_3 = aA_2 - bA_1, & B_2 = aB_2 - bB_1, \\
A_4 = aA_3 - bA_2, & B_4 = aB_3 - bB_2, \\
A_5 = aA_4 - bA_3, & B_5 = aB_4 - bB_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

so kommt:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= A_1\alpha - B_1, \\
\alpha^2 &= A_2\alpha - B_2, \\
\alpha^3 &= A_3\alpha - B_3, \\
\alpha^4 &= A_4\alpha - B_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Substituirt man diese Werthe und vergleicht, so erhält man:

$$
X = x^m - mx^{m-1}yB_1 - \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2B_2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3B_3 - \ldots,
$$

$$
Y = mx^{m-1}yA_1 + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2A_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}y^3A_3 + \ldots.
$$

Da die Wuzel α nicht in den Ausdrücken für X und Y vorkommt, so ist, weil

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m,$$

auch

$$X + \beta Y = (x + \beta y)^m;$$

multiplicirt man also die beiden Gleichungen mit einander, so kommt:

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$

folglich:

$$Z = x^2 + axy + by^2.$$

Also ist das Problem gelöst.

Wenn $a = 0$ ist, so werden die Formeln viel einfacher; denn man hat dann:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -b, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = b^2,$$
$$A_6 = 0, \quad A_7 = -b^3, \quad \ldots,$$

und ebenso:

$$B_1 = 0, \; B_2 = b, \; B_3 = 0, \; B_4 = -b^2, \; B_5 = 0, \; B_6 = b^3, \; \ldots;$$

also:

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^{m-4} y^4 b^2 - \ldots,$$

$$Y = m x^{m-1} y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3 b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} x^{m-5} y^5 b^2 - \ldots,$$

und diese Werthe werden der Gleichung

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m$$

genügen.

90. Gehen wir nun zu den Formen von drei Dimensionen über; es seien α, β, γ, die drei Wurzeln der Gleichung dritten Grades

$$s^3 - as^2 + bas - c = 0,$$

und betrachten wir das Product der drei Factoren:

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

welches nothwendig rational sein wird, wie sogleich erhellen soll. Nach ausgeführter Multiplication hat man das folgende Product:

$$x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 y + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2 z + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)xy^2$$
$$+ (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta)\, xyz$$
$$+ (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)xz^2 + \alpha\beta\gamma y^3 + (\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta)y^2 z$$
$$+ (\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^2\gamma^2\alpha)\, yz^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 z^3;$$

Hätte man eine dritte Form wie diese:

$$x_2^3 + ax_2^2y_2 + (a^2 - 2b)x_2^2z_2 + bx_2y_2^2 + (ab - 3c)x_2y_2z_2$$
$$+ (b^2 - 2ac)x_2z_2^2 + cy_2^3 + acy_2^2z_2 + bcy_2z_2^2 + c^2z_2^3,$$

und man wollte ein Product aus dieser und den beiden vorhergehenden haben, so brauchte man offenbar nur

$$X_1 = Xx_2 + c(Yz_2 + Zy_2) + acZz_2,$$
$$Y_1 = Xy_2 + Yx_2 - b(Yz_2 + Zy_2) - (ab - c)Zz_2,$$
$$Z_1 = Xz_2 + Zx_2 + Yy_2 + a(Yz_2 + Zy_2) + (a^2 - b)Zz_2$$

zu setzen, und man erhielte das verlangte Product:

$$X_1^3 + aX_1^2Y_1 + (a^2 - 2b)X_1^2Z_1 + bX_1Y_1^2 + (ab - 3c)X_1Y_1Z_1$$
$$+ (b^2 - 2ac)X_1Z_1^2 + cY_1^3 + acY_1^2Z_1 + bcY_1Z_1^2 + c^2Z_1^3.$$

91. Setzen wir jetzt $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, so haben wir:

$$X = x^2 + 2cyz + acz^2,$$
$$Y = 2xy - 2byz - (ab - c)z^2,$$
$$Z = 2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2,$$

und diese Werthe werden der Gleichung

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 + (a^2 - 2b)X^2Z + (ab - 3c)XYZ$$
$$+ acY^2Z + (b^2 - 2ac)XZ^2 + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^2$$

genügen, wenn man

$$V = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + (a^2 - 2b)x^2z$$
$$+ (ab - 3c)xyz + acy^2z + (b^2 - 2ac)xz^2 + bcyz^2 + c^2z^3$$

nimmt; man hätte also z. B. eine Gleichung von der Form

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 = V^2$$

zu lösen, wo a, b, c irgend welche gegebene Grössen bedeuten, so brauchte man nur $Z = 0$ zu setzen, indem man

$$2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2 = 0,$$

macht, woraus man erhält:

$$x = -\frac{y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2}{2z},$$

und substituirt man diesen Werth von x in die vorhergehenden Ausdrücke von X, Y, Z und V, so hat man sehr allgemeine Werthe dieser Grössen, die der vorgelegten Gleichung genügen. Diese Lösung verdient wohl bemerkt zu werden wegen ihrer Allgemeinheit und wegen der Methode, mittelst welcher wir zu ihr gelangt sind; es ist vielleicht die einzige, die leicht zum Ziele führt.

Man erhält nun ebenso die Lösung der Gleichung

$$X_1^3 + aX_1^2Y_1 + (a^2 - 2b)X_1^2Z_1 + bX_1Y_1^2 + (ab - 3c)X_1Y_1Z_1 \\ + (b^2 - 2ac)X_1Z_1^2 + cY_1^3 + acY_1^2Z_1 + bcY_1Z^2 + c^2Z_1^3 = V^3,$$

wenn man in den obenstehenden Formen

$$x_2 = x_1 = x, \quad y_2 = y_1 = y, \quad z_2 = z_1 = z$$

setzt und wenn man

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz \\ + (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3$$

nimmt. Man könnte auch folgweise die Fälle lösen, wo man statt V^3, der dritten Potenz, V^4, V^5, ... hätte; allein wir wollen diese Fragen ganz allgemein behandeln, wie wir es vorhin in No. 90 gemacht haben.

92. Es soll also eine Gleichung von folgender Form gelöst werden:

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c)XYZ \\ + (b^2 - 2ac)XZ^2 + cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^m.$$

Da die Grösse, welche das erste Glied dieser Gleichung bildet, nichts anderes ist als das Product folgender drei Factoren

$$(X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \beta Y + \beta^2 Z)(X + \gamma Y + \gamma^2 Z),$$

so hat man, um diese Grösse gleich einer m-ten Potenz werden zu lassen, offenbar nur nöthig, einen jeden der Factoren

gleich einer solchen Potenz zu machen. Es sei also

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m;$$

so entwickele man zunächst die m-te Potenz von $x + \alpha y + \alpha^2 z$ nach *Newton's* Theorem:

$$x^m + m x^{m-1}(y + \alpha z)\,\alpha + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}(y + \alpha z)^2 \alpha^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3}(y + \alpha z)^3 \alpha^3 + \ldots,$$

oder indem man die verschiedenen Potenzen von $y + \alpha z$ bildet und nach Dimensionen von α ordnet,

$$x^m + m x^{m-1} y \alpha + \left[m x^{m-1} z + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2\right] \alpha^2$$
$$+ \left[m(m-1) x^{m-2} y z + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3\right] \alpha^3 + \ldots.$$

Da man aber in dieser Form nicht deutlich das Gesetz der Glieder überschaut, so setzen wir allgemein:

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m = P + P_1 \alpha + P_2 \alpha^2 + P_3 \alpha^3 + P_4 \alpha^4 + \ldots,$$

und man findet:

$$P = x^m,$$

$$P_1 = \frac{m y P}{x},$$

$$P_2 = \frac{(m-1) y P_1 + 2 m z P}{2x},$$

$$P_3 = \frac{(m-2) y P_2 + (2m-1) z P_1}{3x},$$

$$P_4 = \frac{(m-3) y P_3 + (2m-2) z P_2}{4x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

was leicht mit Hülfe der Differentialrechnung zu erweisen ist.

Da nun α eine Wurzel der Gleichung

$$s^3 - as^2 + bs - c = 0$$

ist, so hat man

$$\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0, \quad \text{woraus} \quad \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c;$$

also

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac,$$

$$\begin{aligned}\alpha^5 &= (a^2 - b)\alpha^3 - (ab - c)\alpha^2 + ac\alpha \\ &= (a^3 - 2ab + c)\alpha^2 - (a^2 b - b^2 - ac)\alpha + (a^2 - b)c,\end{aligned}$$

u. s. f.

Setzt man nun zur Vereinfachung:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0, \\
A_2 &= 1, \\
A_3 &= a, \\
A_4 &= aA_3 - bA_2 + cA_1, \\
A_5 &= aA_4 - bA_3 + cA_2, \\
A_6 &= aA_5 - bA_4 + cA_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= 1, \\
B_2 &= 0, \\
B_3 &= b, \\
B_4 &= aB_3 - bB_2 + cB_1, \\
B_5 &= aB_4 - bB_3 + cB_2, \\
B_6 &= aB_5 - bB_4 + cB_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0, \\
C_2 &= 1, \\
C_3 &= c, \\
C_4 &= aC_3 - bC_2 + cC_1, \\
C_5 &= aC_4 - bC_3 + cC_2, \\
C_6 &= aC_5 - bC_4 + cC_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so kommt:

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1\alpha^2 - B_1\alpha + C_1, \\ \alpha^2 &= A_2\alpha^2 - B_2\alpha + C_2, \\ \alpha^3 &= A_3\alpha^2 - B_3\alpha + C_3, \\ \alpha^4 &= A_4\alpha^2 - B_4\alpha + C_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m,$$

so wird er aus drei Theilen bestehen; der eine ist ganz rational, der zweite ist mit α multiplicirt, der dritte mit α^2; man hat also nur den ersten mit X zu vergleichen, den zweiten mit αY und den dritten mit $\alpha^2 Z$ und auf diese Weise erhält man:

$$\begin{aligned} X &= P + P_1 C_1 + P_2 C_2 + P_3 C_3 + P_4 C_4 + \ldots, \\ Y &= - P_1 B_1 - P_2 B_2 - P_3 B_3 - P_4 B_4 - \ldots, \\ Z &= P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3 + P_4 A_4 + \ldots. \end{aligned}$$

Diese Werthe werden also der Gleichung

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m$$

genügen; und da die Wurzel α nicht speciell in die Ausdrücke für X, Y und Z eingeht, so kann man offenbar α in β oder in γ verändern, also hat man auch:

$$\begin{aligned} X + \beta Y + \beta^2 Z &= (x + \beta y + \beta^2 z)^m, \\ X + \gamma Y + \gamma^2 Z &= (x + \gamma y + \gamma^2 z)^m. \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun diese drei Gleichungen mit einander, so erhellt, dass das erste Glied mit dem ersten Gliede der vorgelegten Gleichung identisch ist und das zweite Glied gleich einer m-ten Potenz, deren Basis V sei, und man hat:

$$\begin{aligned} V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz \\ + (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3. \end{aligned}$$

Also findet man die verlangten Werthe von X, Y, Z und V, welche drei Unbestimmte enthalten.

93. Wollte man Formen vierter Dimension mit denselben Eigenschaften finden, wie diejenigen, die soeben entwickelt wurden, so müsste man das Product von vier Factoren betrachten von dieser Form

$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t,$$
$$x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t,$$
$$x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t,$$
$$x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t$$

und annehmen, α, β, γ, δ seien Wurzeln einer Gleichung vierten Grades:

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0;$$

man hätte auf diese Weise:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = a,$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b,$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c,$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = d,$$

und hierdurch könnte man alle Coefficienten der verschiedenen Glieder des fraglichen Productes bestimmen, ohne Kenntniss der Wurzeln α, β, γ, δ; da hierzu aber verschiedene Reductionen nöthig werden, die nicht so ganz leicht darzustellen sind, so kann man bequemer folgendermaassen verfahren.

Es sei im Allgemeinen

$$x + sy + s^2 z + s^3 t = \varrho,$$

und da s durch die Gleichung

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0$$

bestimmt ist, so eliminire man s aus diesen beiden Gleichungen nach bekannten Regeln, und ordne die resultirende Gleichung nach der Unbekannten ϱ, so wird sie den vierten Grad erreichen und in der Form

$$\varrho^4 - N\varrho^3 + P\varrho^2 - Q\varrho + R = 0$$

erhalten werden können.

Diese Gleichung erreicht aber in Bezug auf ϱ den vierten Grad nur, weil s die vier Werthe α, β, γ, δ, und mithin auch ϱ folgende vier Werthe haben kann:

$$x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t,$$
$$x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t,$$
$$x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t,$$
$$x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t;$$

diese sind nichts anderes als die Factoren, deren Product man haben will; weil nun das letzte Glied R das Product aller vier Wurzeln oder Werthe von ϱ sein muss, so wird eben dieses Glied R das verlangte Product sein.

Jetzt aber genug über diesen Gegenstand, den wir vielleicht bei einer anderen Gelegenheit wieder aufnehmen können.

Ich schliesse diese »Zusätze«, welche die Grenzen, die ich mir gesteckt habe, nicht weiter fortzusetzen gestatten; vielleicht wird man sie schon gar zu lang finden; da aber die behandelten Gegenstände ziemlich neu und wenig bekannt sind, so glaubte ich mehr ins Einzelne gehen zu müssen, damit die dargestellten Methoden und ihre verschiedenartigen Anwendungen recht deutlich erscheinen.



Anmerkungen.

Eulers »Vollständige Anleitung zur Algebra« erschien zum ersten Male im Jahre 1770. Sie war von dem damals bereits erblindeten Verfasser einem Gehülfen in die Feder dictirt, und zeichnet sich aus durch Klarheit und Einfachheit der Darstellung, die durchweg dem Verständnisse eines Anfängers angepasst ist. Das Werk hat schnell eine ganz ausserordentliche Verbreitung gefunden. Es ist in zahlreichen deutschen Ausgaben, dann aber auch in Uebersetzungen in verschiedenen Sprachen erschienen. Von besonderer Bedeutung ist die französische, die seit 1784 wiederholt aufgelegt wurde, für deren Zustandekommen sich noch *d'Alembert* interessirt hatte. Diese französische Uebersetzung hat eine grosse Bereicherung erfahren in den »Additions« von *Lagrange*, die hier in deutscher Uebersetzung vorliegen. Diese Zusätze beziehen sich auf die sogenannte unbestimmte oder diophantische Analysis, welcher der letzte Theil von *Eulers* Algebra gewidmet ist, nämlich auf solche Aufgaben, in denen die Unbekannten aus Bedingungen gesucht werden, die zu ihrer vollständigen Bestimmung nicht ausreichen, in denen aber die Unbekannten noch durch die Forderung beschränkt sind, rationale oder auch ganze Zahlen zu sein.

Dieser Zweig der Analysis, der einen wesentlichen Theil der Zahlentheorie bildet, hatte gerade in jener Zeit durch die Untersuchungen von *Lagrange* sehr bedeutende Fortschritte gemacht.

Der grosse Werth dieser Arbeit von *Lagrange* liegt aber nicht sowohl in den besonderen Problemen, die im Anschluss an *Eulers* Algebra behandelt sind, als in den darin angebahnten vollständig neuen Untersuchungen, an die dann später *Dirichlet* angeknüpft hat, und die in allerneuester Zeit in der Theorie der algebraischen Zahlen ihre Stelle gefunden haben.

Von grundlegender Wichtigkeit sind in dieser Beziehung der § II über das Minimum algebraischer Ausdrücke und die Untersuchungen der § VII und VIII über die Lösungen der *Pell*'schen Gleichung und endlich der Schlussparagraph IX über die in lineare Factoren zerlegbaren Formen von mehreren Variablen, und höheren Graden. Diese berühmten Entdeckungen sind, wenn auch nicht zum ersten Male, so doch am vollständigsten und im Zusammenhang in diesen »Zusätzen« dargestellt. Die Stellen, wo die betreffenden Resultate zuerst aufgestellt sind, hat *Lagrange* selbst im Texte angegeben.

Die Verallgemeinerungen von *Dirichlet* sind in den folgenden Abhandlungen zu finden:

»Sur la théorie des Nombres«, Comptes rendus der Pariser Akademie, Bd. X (1840).

»Einige Resultate von Untersuchungen über eine Classe homogener Functionen des dritten und der höheren Grade.« Monatsberichte der Berliner Akademie, 1841.

»Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen«, ebenda 1842.

»Zur Theorie der complexen Einheiten«, ebenda 1846. (*C. Lejeune*, *Dirichlet*s Werke, Bd. I.)

Man vergleiche auch die betreffenden Abschnitte in *Dirichlet-Dedekind*s Vorlesungen über Zahlentheorie, besonders die §§ 83, 141, 142, 182 der vierten Auflage.

Bei der vollendeten Klarheit in *Lagrange*s Darstellung ist zu erläuternden Anmerkungen kein Anlass. Einige kleine Ungenauigkeiten im französischen Text sind in dieser deutschen Ausgabe verbessert.

Inhalt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

